Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°1 de mathématiques** **Term - ME**

Thème : Calcul algébrique et polynômes dans $\mathbb{C}$ **09/10/20**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous **forme algébrique**.

1. $\frac{2}{z} + 3i = -2 - 5i$
2. $\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i} = 3$
3. $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
4. $(z-2)^2 = -4$
5. $(z-2)^2 = (3+iz)^2$
6. $\frac{2}{z^4} + \frac{7}{z^2} = -3$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants. On donnera les solutions sous **forme algébrique**.

1. $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 2 \\ 2z_1 + 2z_2 = 2 + 3i \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 1 \end{cases}$

Exercice 3

Soit z un nombre complexe différent de $-2i$. On pose $Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1. Démontrer que Z est réel si, et seulement si $(2-i)z - (2+i)\bar{z} = -8i$.
2. Déterminer z tel que Z est réel.

Exercice 4

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$.

1. Montrer que $i\sqrt{2}$ est une racine de P.
2. a) Déterminer a, b et c tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(az^2 + bz + c)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 5

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + 8i$.

1. Que peut-on dire, *a priori*, du nombre de racines de ce polynôme ?
2. Déterminer un nombre complexe a tel que $a^3 = -8i$.
3. En déduire une factorisation de P en un produit de deux polynômes que l'on déterminera.

BONUS !

1) Soit $\theta \in [0\,;\,\pi]$, on considère l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)\,z + 1 = 0$.

a) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une unique solution réelle.

b) Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ.

2) Soit $z_0 = \frac{5+3i\sqrt{2}}{1-2i\sqrt{3}}$. Montrer que pour tout n entier naturel, $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3})$.

Barème probable **Ex 1 :** **Ex 2 :** **Ex 3 :** **Ex 4 :** **Ex 5 :** **Bonus :**