Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°3 de mathématiques** **Term**

Suites, dénombrement et limites de fonctions

12/11/20

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{x-1} + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. On note C la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormal.

1. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Déterminer les variations de la fonction f.
2. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) La courbe C admet-elle des asymptotes ? *Justifier*
3. Construire le tableau de variations de la fonction f.

4. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0. On la notera y_T.
5. a) Etudier le signe de $f(x) - y_T$.
   b) En déduire la position relative entre la courbe C et la tangente T sur $\mathbb{R}$.
6. Construire les asymptotes éventuelles, la tangente et la courbe dans un repère orthonormal.

Exercice 3

Pour chaque question, une seule est exacte.

Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question avec la lettre de la réponse choisie.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \frac{n!+(n+1)!}{\boldsymbol{n+2}}$. Alors :
   a) $A \in \mathbb{N}$ b) $A \notin \mathbb{N}$ c) $(n+2)A < n!$

2. Le nombre de paires dans un ensemble comptant n éléments est :
   a) $n - \sum_{k=1}^{n} k$ b) $\sum_{k=1}^{n} (n-k)$ c) $n!$

3. On tire une à une trois cartes dans un paquet de douze cartes. Le nombre de tirages différents est :
   a) $\binom{12}{3}$ b) $\frac{12!}{3!}$ c) $\frac{12!}{9!}$

4. Soit l'équation $2\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Elle a pour ensemble solution :
   a) $S = \{2\}$ b) $S = \{0\,;1\,;4\}$ c) $S = \{4\}$

5. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

   a) Vrai b) Faux

BONUS !

On considère la fonction (homographique) $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ telle que :

- La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote d'équation $y = 2$ (en $\pm\infty$) et une asymptote d'équation $x = -1$.
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Déterminer les réels a, b, c et d.

Barème probable **Ex 1 : 8** **Ex 2 : 7** **Ex 3 : 5** **Bonus : 2**