Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°2 de mathématiques** **Term - ME**

Thème : Trigonométrie, géométrie et nombres complexes **30/11/20**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1 *Vrai ou faux*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué **un point par réponse exact correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. On a $1 + j + j^2 = 0$.

Proposition 4

Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i-\frac{\pi}{3}}$.

La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est : $\sqrt{3}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

Exercice 2

1. Déterminer les formes trigonométriques des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad$ $z_2 = -6\sqrt{3} - 6i$ $\quad$ $z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

2. Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes suivants :

$z_4 = \frac{2}{3}i$ $\quad$ $z_5 = 1 + i$ $\quad$ $z_6 = \frac{2}{1+i}$

Exercice 3

1. a. ***Question de cours***
Donner l'expression de $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$.

b. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3. a. ***Question de cours***

   Donner l'expression de $\cos(a+b)$.

   b. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

Exercice 4

On définit la suite de nombre complexes (z_n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{3} z_n + \frac{2}{3} i \end{cases}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n,on note A_n le point d'affixe z_n. Pour tout entier naturel n,on note pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n. On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i}).$$

3. **a.** Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

b. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0.$$

c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. **a.** Soit n un entier naturel. déterminer un argument de u_n.

b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :

$$y = -x + 1.$$

BONUS !

1. Montrer que pour tout x d'un ensemble D à déterminer $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
2. Montrer que pour tout x d'un ensemble D' à déterminer $\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$.

Barème probable **Ex 1 : 4** **Ex 2 : 6** **Ex 3 : 5** **Ex 4 : 5** **Bonus : 2**