Corrigé du DS n°4 (15/12/20)

Exercice 1

1. $f'(x) = ae^{-0,2x} - 0,2(ax+b)e^{-0,2x} = (-0,2ax + a - 0,2b)e^{-0,2x}$.

2. a) $f(0) = 7$.
   b) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en 1 soit celui de la droite (AB) ; donc :
   $f'(0) = \frac{14,2-7}{2-0} = 3,6$.

3. $f(0) = 7 \Leftrightarrow b = 7$.
   $f'(0) = 3,6 \Leftrightarrow a - 0,2b = 3,6 \Leftrightarrow a = 0,2 \times 7 + 3,6 = 1,4 + 3,6 = 5$.

4. a) On a $f'(x) = 5e^{-0.2x} - 0.2(5x+7)e^{-0.2x} = 5e^{-0.2x} - (x+1.4)e^{-0.2x} = (-x+3,6)e^{-0.2x}$.
   b) Comme $e^{-0.2x} > 0$ sur [0 ; 25], le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x + 3.6$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		3,6		25
$f'(x)$			0		
f			$25e^{-0.72}$		
	7	$\nearrow$		$\searrow$	$132e^{-5}$

c) f est continue et strictement décroissante sur [3,6 ; 25]. De plus, comme $25e^{-0.72} \approx 12.2$ et $132e^{-0.5} \approx 0.9$, on a $6 \in [132e^{-5} ; 25e^{-0.72}]$. Donc par le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α. Par la calculatrice, on obtient $12.1 < \alpha < 12,11$.

5. a) $f''(x) = -e^{-0.2x} - 0.2(-x+3,6)e^{-0.2x} = (0,2x - 1,72)e^{-0.2x}$.
   b)) Comme $e^{-0.2x} > 0$ sur $[0 ; 25]$, le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $0,2x - 1,72$. On en déduit le tableau de signes de la fonction f'' :

x	0		8,6		25
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   f est concave sur [0 ; 8,6] et convexe sur [8,6 ; 25]. La courbe possède un point d'inflexion au point d'abscisse 8,6.

Exercice 2

1. f est continue sur [0 ; 2] et en particulier en 1 soit $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) \Leftrightarrow a^2 + 3 = 1 + 3a$
   $\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$. On a $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Il y a deux solutions qui sont :
   $a_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $a_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.
   Si $a = 1$ ou $a = 2$, la fonction f est continue sur [0 ; 2].

2. a) En lisant le tableau de variations de f, on est amené à raisonner en deux étapes :
   - Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, f est continue et strictement croissante.
   De plus, $0 \in]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; f(0)] =]-\infty ; 1]$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$.
- Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, f est continue et strictement décroissante. De plus, $0 \in \left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ; f(0)\right] = [-2\ ; 1]$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution β à l'équation $f(x) = 0$.
En définitive, sur $\mathbb{R}$, il existe deux solutions α et β à l'équation $f(x) = 0$.
b) Le tableau de signes de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ C admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$

d) (i) - Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ par composition avec la fonction exponentielle ($\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$) on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ par composition avec la fonction exponentielle ($\lim\limits_{x\to-2} e^x = e^{-2}$) on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = e^{-2}$.

(ii) On a $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

(iii) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{f(x)} > 0$ le signe de *g'(x)* dépend du signe de *f'(x)* que l'on obtient d'après le tableau de variations de la fonction *f*. D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	e^{-2}

Exercice 3

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{5}{x^2}) = \frac{1}{2}\frac{x^2-5}{x^2}$ donc f' est du même signe que $x \mapsto x^2 - 5$ c'est-à-dire négative sur $]0;\sqrt{5}]$ et positive sur $[\sqrt{5};+\infty[$. On en déduit que f est décroissante sur $]0;\sqrt{5}]$ et croissante sur $[\sqrt{5};+\infty[$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n > 0$, on a $\sqrt{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.Initialisation : Pour $n = 1$ on a $u_1 = 3$ et $u_2 = f(3) = \frac{7}{3} \approx 2,33 > \sqrt{5}$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$. Hérédité : On suppose qu'à un rang n, on ait $\sqrt{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On sait que f est croissante sur $[\sqrt{5};+\infty[$ donc $f(\sqrt{5}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ soit finalement $\sqrt{5} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Il y a donc hérédité. Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 1$, elle est héréditaire, on a donc pour tout $n > 0$, $\sqrt{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On en déduit que (u_n) est une suite décroissante et minorée par $\sqrt{5}$.

3. Tout suite décroissante et minorée est convergente, il existe donc ℓ réel pour lequel $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On sait que ℓ respecte l'égalité $f(\ell) = \ell$ avec $\ell \in]0\ ;\ +\infty[$. On en déduit que $\ell = \sqrt{5}$.

Exercice 4

1. **a.** Grâce à la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\\ &= 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Dès lors, par définition de G, $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$ et on conclut que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

b. Comme J est le milieu de [CD],

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{AJ}.$$

Grâce à la question précédente, on en déduit que

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}.$$

c. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont coplanaires donc les points A, B, J et G sont coplanaires.

2. Comme I est le milieu de [AB],

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{GI}.$$

De même, comme J est le milieu de [CD],

$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{GJ}.$$

Il s'ensuit, par définition de G, que $2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{0}$ ce qui permet de conclure que G est le milieu de [IJ].