1 Suites numériques

1. Généralités sur les suites

Définition et notations

Définition

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement u_n (notation indicielle).

Ainsi, on a : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$.

Remarques

1) n est l'indice (ou le rang) et u_n le terme de rang n. Par exemple, u_{n+1} est le terme de rang $n + 1$ (celui qui suit u_n) alors que $u_n + 1$ est le terme de rang n augmenté de 1.

2) Attention ! (u_n) désigne la suite alors que u_n est un nombre.

3) Une suite n'est pas forcément définie à partir de $n = 0$. En effet, prenons la suite $u_n = \dfrac{1}{n-2}$, son 1er terme est $u_3 = 1$.

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologique ; en économie ou par des mesures physiques. En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies par des formules dont l'objet sera la modélisation dans les contextes cités précédents en étudiant leurs propriétés mathématiques.

Suite définie par une formule explicite

Définition

Une suite (u_n) est définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n. Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Remarque

Dit autrement : Soit p un entier. Si une fonction numérique est définie sur l'intervalle $\left[p\,;+\infty\right[$ on définit une suite en posant pour tout entier $n \geq p, u_n = f(n)$.
Calculer les termes de la suite (u_n) revient donc à calculer des images.

Suite définie par récurrence

Définition

Une suite (u_n) est une suite définie par récurrence si elle est définie par la donnée de son 1[er] terme permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou parfois des précédents) appelée relation de récurrence.

Vocabulaire

Le mot « récurrence » vient du latin « recurrere » qui signifie revenir en arrière.

Exemple

Soit $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

Le terme u_{n+1} est obtenu en doublant le précédent auquel on ajoute 1.

Les premiers termes sont : $u_1 = -3,\ u_2 = -5,\ u_3 = -9,\ u_4 = -17$.

Remarque

Ce type de définition de suite ne permet pas d'obtenir rapidement des termes d'indices élevés car chaque terme s'obtient en fonction du précédent.

Exemple d'algorithme permettant d'obtenir des termes d'une suite

Considérons la suite (u_n) suivante définie par récurrence : $(u_n) : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$.

L'algorithme (« Boucle Pour »), ci-dessous, permet d'obtenir N termes de cette suite, depuis u_1 jusqu'à u_N, pour un premier terme N fixé.

```
U <– ?
N <– ?
   Pour I variant de 1 à N
      U prend la valeur 5 × U – 2
   FinPour
Afficher U
```

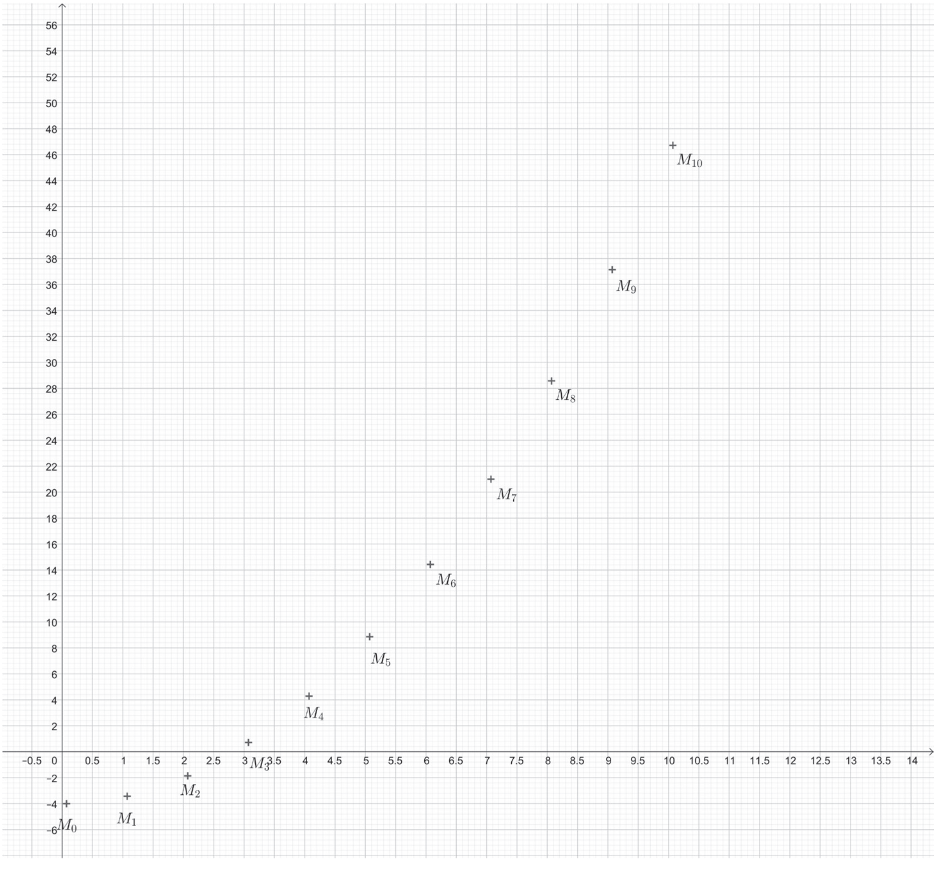
Représentation graphique d'une suite

Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;u_n)$.

Exemple

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 4$.

Il est très aisé d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel (comme GeoGebra).



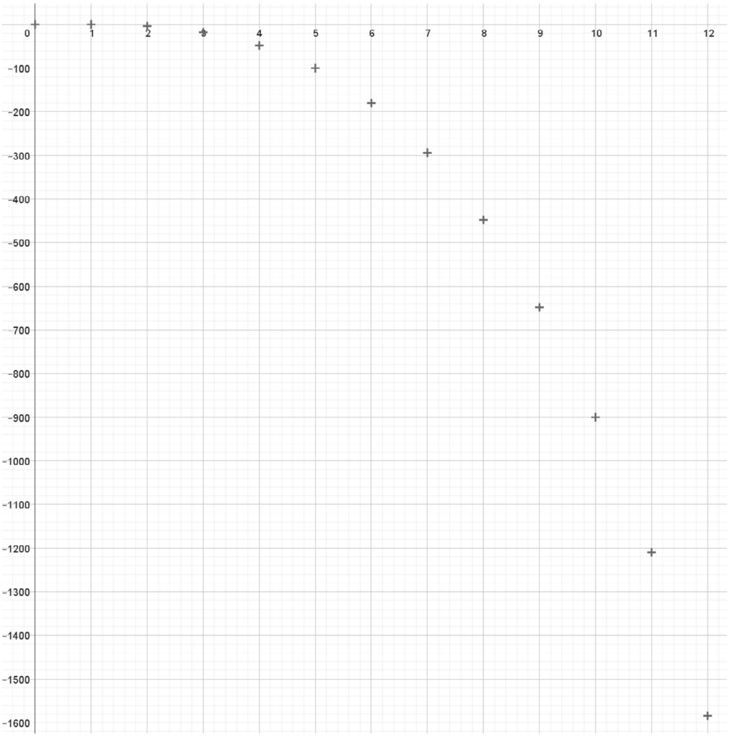
Remarque

Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$). $u_{2,5}$ n'a mathématiquement pas de sens et donc le point $\left(2{,}5\,;u_{2,5}\right)$ non plus (2,5 n'est pas un entier).

Résumé de cours

2. Sens de variation d'une suite (introduction)

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n).



Le nuage de points descend, on peut donc conjecturer que la suite est décroissante. On a par exemple $u_9 < u_8$ et de manière générale on aura que pour tout entier n, $u_{n+1} < u_n$.

Formalisons ceci dans la définition suivante :

Définitions

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

(i) Dire que (u_n) est croissante signifie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.

(ii) Dire que (u_n) est décroissante signifie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

(iii) Dire que (u_n) est constante signifie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

(iv) Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Vocabulaire

Étudier la « monotonie » d'une suite, c'est donc étudier ses variations.

Remarques

1) On obtient les définitions de « strictement » croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

2) Dans certaines situations, on étudiera la monotonie d'une suite pour des valeurs de n supérieures ou égales à une valeur donnée entière p. Par exemple pour la suite $v_n = \dfrac{1}{n-1}$ définie pour $n \geq 2$.

3) Attention ! il existe des suites non monotones. Par exemple, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \left(-1\right)^n$ (appelée suite alternée) n'est ni croissante, ni décroissante.

Propriétés

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

(i) Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.

(ii) Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarque

Étudier la monotonie d'une suite (u_n) revient donc à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

3. Suites arithmétiques

Définition et propriétés

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si, à partir de son 1er terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre appelé raison de la suite et est noté r.

Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarques

1) On a dans le cas où (u_n) est arithmétique que pour tout entier naturel n, $r = u_{n+1} - u_n$.

2) Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de prouver que pour tout entier n la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (donc indépendante de n). Cette constante sera alors la raison de la suite.

D'où les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r.

(i) Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

(ii) Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

(iii) Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

Représentation graphique d'une suite arithmétique

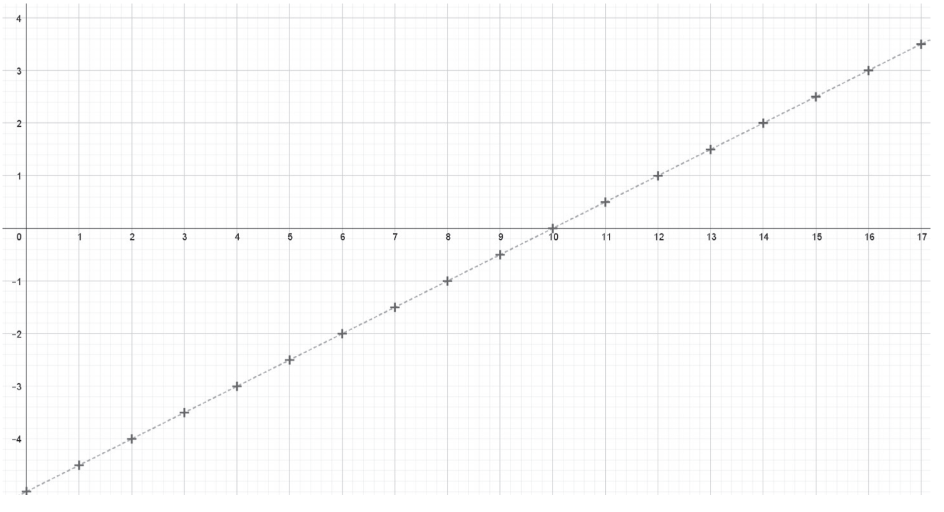
Propriétés

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

(i) Si (u_n) est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

(ii) Si (u_n) est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.

Ci-dessous, la représentation d'une suite arithmétique ; on constate bien que les points de la suite sont alignés par rapport à une droite.



4. Suites géométriques

Définition et propriétés

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique si, à partir de son 1^er^ terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison de la suite et est noté q.

Pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Remarques

1) On a dans le cas où (u_n) est géométrique (de termes non nuls) que pour tout entier naturel $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que pour tout entier n le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

D'où les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit (u_n) une suite géométrique de 1^er^ terme $u_0 > 0$ et de raison $q \neq 0$.

(i) Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

(ii) Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

(iii) Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

(iv) Si $q < -1$, alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante (elle n'est pas monotone).

Représentation graphique d'une suite géométrique

Propriétés

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

(i) Si (u_n) est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.

(ii) Si (u_n) est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

Ci-dessous, la représentation d'une suite géométrique ; on constate bien que les points de la suite suivent une courbe de type « exponentielle » (une décroissance rapide en l'occurrence ici).