Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°5 de mathématiques** **Term**

Probabilité, loi binomiale et géométrie analytique dans l'espace

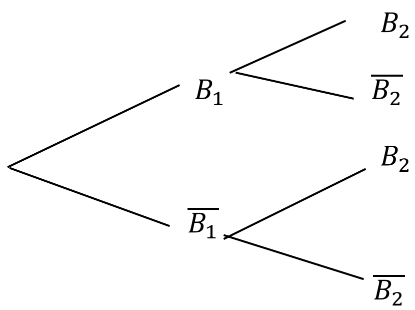
19/02/21

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Dans un pays imaginaire, on admet qu'un jour donné soit il fait beau soit il pleut.
S'il fait beau un jour, alors il fera beau le jour suivant avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$. S'il pleut un jour, alors il pleuvra le jour suivant avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
Aujourd'hui, il pleut.
On s'intéresse à la probabilité qu'il fasse beau demain, dans 2 jours, dans 3 jours, …, dans n jours.
Pour $n \geq 1$, on désigne par B_n l'événement : « il fait beau jour n »
On note p_n la probabilité $P(B_n)$.

1. Reproduire et compléter sur votre copie l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer p_2.
3. Faire un arbre pondéré où vous ferez apparaître les événements $B_n, \overline{B_n}, B_{n+1}$ et $\overline{B_{n+1}}$ et démontrer que pour tout $n \geq 1, p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$.
4. On définit la suite (u_n) pour $n \geq 1$ par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique puis donner une expression en fonction de n de u_n.
   b) En déduire que $p_n = -\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$
   c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 2

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale).
On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

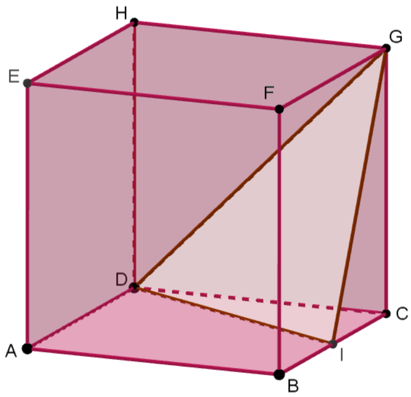
On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'évènement : « l'angine du malade est bactérienne » ;
- T l'évènement : « le test effectué sur le malade est positif ».

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. a) Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif ?
   b) Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.
   c) Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?
3. On choisit au hasard 20 malades atteints d'une angine.
   On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les 20 malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? *Justifier*
   b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
   c) Calculer la probabilité qu'au plus 5 malades aient un test positif. *Arrondir au centième.*
   d) Calculer la probabilité qu'au moins 8 malades aient un test positif. *Arrondir au centième.*
4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à X.
   b) Il y a 9 personnes testées positivement parmi 20 malades. Cela remet-il en cause le test ?

Exercice 3

Soit le cube ABDCEFGH de côté 1 et I est le milieu de [BC].



1. Calculer les longueurs DG, GI et DI. En déduire la nature du triangle DGI.
2. Calculer les produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DH}$ $\quad$ $\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{FB}$ $\quad$ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$
3. En démontrant que $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GD} = 1$, calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{DGI}$.

Bonus !

1. Montrer que : A et B indépendants ⇔ $\bar{A}$ et B indépendants ⇔ $\bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants.

2. On considère un groupe de n personnes. Déterminer la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire.

Barème probable **/20** **Ex 1 : 5.5** **Ex 2 : 8.5** **Ex 3 : 6** **Bonus ! 2**