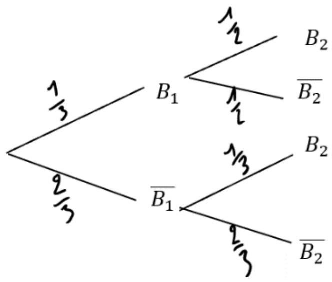
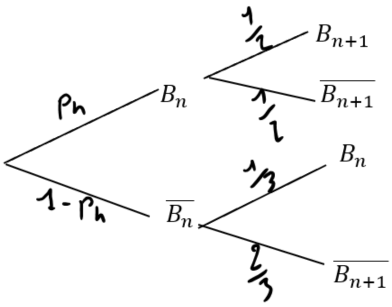
Corrigé du DS n°5 (19/01/21)

Exercice 1

1. Voici l'arbre pondéré demandé :



2. Par la formule des probabilités totales on a : $p_2 = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_2} \cap B_2)\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18} \approx 0{,}4$.
3. Voici l'arbre pondéré demandé :



Soit $n \geq 1$. Par la formule des probabilités totales on a :

$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$.

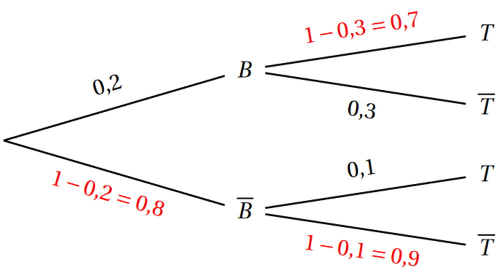
4. a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}p_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{6}u_n$. Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de 1er terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{15}$. D'où $u_n = -\frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

b) $u_n = p_n - \frac{2}{5} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{2}{5}$. Soit $p_n = -\frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.

c) Comme $\frac{1}{6} < 1, -\frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \to 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5}$.

Exercice 2

1. On représente la situation par un arbre de probabilité :



2. **a.** L'angine du malade est bactérienne et que le test est positif correspond à $B \cap T$:
$p(B \cap T) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$

b. D'après la formule des probabilités totales :
$p(T) = p(B \cap T) + p(\overline{B} \cap T) = 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}22$

c. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. La probabilité pour que son angine soit bactérienne est : $p_T(B) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}22} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$.

3. a) L'expérience consiste à répéter 20 épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques où le succès est d'obtenir un test positif de probabilité 0,22. Donc $X \sim \mathcal{B}(20\,;0{,}22)$.

b) $E(x) = np = 20 \times 0{,}22 = 4{,}4$.
$V(X) = np(1-p) = 20 \times 0{,}22 \times 0{,}78 = 3{,}432$.

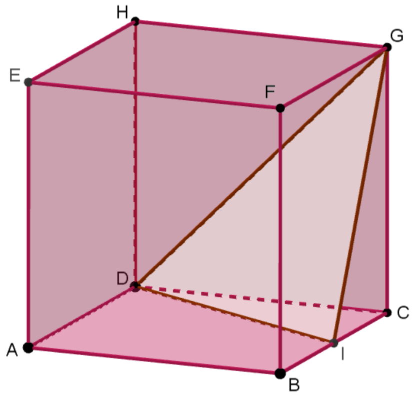
c) $P(X \leq 5) \approx 0{,}73$. La probabilité qu'au plus 5 malades aient un test positif est de 0,73.

d) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}05$. La probabilité qu'au moins 8 malades aient un test positif est de 0,05.

4. a) Déterminons a et b tels que $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95 = 1 - \alpha$ soit $\alpha = 0{,}05$.
On a $P(X \leq a) > 0{,}025$ soit $a = 1$ et $(X \leq b) \geq 0{,}975$ soit $b = 8$.
Un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à X est [1 ; 8].

b) Comme 9 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation cela remet en cause le test.

Exercice 3



Soit le cube ABDCEFGH de côté 1 et I est le milieu de [BC].

1. On a par le théorème de Pythagore appliqué successivement aux triangles GIC, DCI et DCG rectangles en C : $GI = \frac{\sqrt{5}}{2}, DI = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $DG = \sqrt{2}$. Comme GI=DI, DGI est isocèle en I.
2. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DH} = 0$.
$\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{FB} = FB \times FB = 1$.
$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = -IB \times IC = -\frac{1}{4}$.
3. $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GD} = \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI}\right).\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GC} = GC^2 = 1$.
On a $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GD} = GI.GD.\cos\left(\widehat{DGI}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{DGI}\right) = \frac{\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GD}}{GI.GD} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.
$\widehat{DGI} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \approx 51\,°$.