Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°3 de mathématiques** **Term - ME**

Thème : Divisibilité et congruences **29/01/21**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit a et b deux entiers relatifs. Donner la définition de a divise b.
2. a) Compléter la propriété suivante : Soit a, b et c trois entiers relatifs.
   Si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors pour tous m, n appartenant à $\mathbb{Z}$,………………………………
   b) Démontrer cette propriété.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit a et b deux entiers relatifs.
   a) Développer $(a+b)^3$.
   b) Démontrer que : 3 divise $(a+b)^3 \iff$ 3 divise a^3+b^3.
2. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ vérifiant $4x^2-y^2=20$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = 3^{3n+3} - 26n - 27.$$

1. Calculer a_0, a_1 et a_2 et montrer que ces trois entiers sont tous divisibles par 169.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 27a_n = 676(n+1)$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 169 divise a_n.

Exercice 4

1. Trouver tous les entiers naturels n dont le quotient dans la division euclidienne par 5 donne un quotient égal à trois fois le reste.
2. Soit a et b deux entiers relatifs avec $b \leq 20$. Dans la division euclidienne de a par b, le reste est 8 et pour celle de $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer b.

Exercice 5

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 4\ [6]$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 2x\ [6]$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = 3^{4n+3} + 4^{2n+1}$.

1. Démontrer que $3^{4n} \equiv 1\ [5]$ et que $4^{2n} \equiv 1\ [5]$.

2. En déduire que 5 divise $A_n - 1$.

3. Justifier que $A_n - 1$ est pair.

BONUS !

Les deux questions sont indépendantes

1. a) Soit $a \in \mathbb{N}$. Justifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*, a^N - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{N-1} a^k$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^{n+1} - 1$.

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$.

En montrant au préalable que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 3(4^{n+1} - 1)$, démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise u_n.

2. Soit a et m deux entiers naturels. On suppose qu'il existe au moins un entier non nul k tel que $a^k \equiv 1\ [m]$ et on note d le plus petit des entiers non nuls k tels que $a^k \equiv 1\ [m]$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1\ [m]$ si et seulement si d divise k.

Indication : On pourra écrire la division euclidienne de n par d.

Barème probable **Ex 1 : 2** **Ex 2 : 5.5** **Ex 3 : 4.5** **Ex 4 : 3** **Ex 5 : 2** **Ex 6 : 3** **Bonus : 3**