22/03/21

Exercice 1

Soit l'équation suivante $(E_1) : 78x + 69y = 16$ où $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide $PGCD(78\,;69)$.
2. Que peut-on en déduire quant à la résolution de (E_1) ?

Exercice 2

Soit l'équation suivante $(E_2) : 70x + 64y = 38$ où $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide $PGCD(70\,;64)$.
   b) En déduire une équation équivalente (E'_2) à (E_2).
2. a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide $PGCD(35\,;32)$.
   b) En déduire une solution particulière de (E'_2).
3. Déterminer l'ensemble solution de (E_2).

BONUS !

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? ***Justifier***

« La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n}PGCD(n\,;10)$ est convergente. »

Barème probable **Ex 1 : 3** **Ex 2 : 7** **Bonus : 1**

Corrigé ex 1

• Algorithme d'Euclide pour 428 et 322 :

(1)	428	=	322	×	1	+	106
(2)	322	=	106	×	3	+	4
(3)	106	=	4	×	26	+	2
(4)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(322, 428) = 2.

• 237 = 2 × 118 + 1 donc 2 ne divise pas 237
donc l'équation diophantienne -322x - 428y = -237 n'admet pas de solutions.

Corrigé ex 2

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 64 :

(1)	70	=	64	×	1	+	6
(2)	64	=	6	×	10	+	4
(3)	6	=	4	×	1	+	2
(4)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(70, 64) = 2.
En divisant par PGCD(70, 64) : 70x + 64y = 38 <=> 35x + 32y = 19.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 35 et 32 :

(1)	35	=	32	×	1	+	3
(2)	32	=	3	×	10	+	2
(3)	3	=	2	×	1	+	1
(4)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	3	×	1	+	2 × (-1)
(2)	1	=	3	×	1	+	(32-3×10) × (-1)
	1	=	32	×	(-1)	+	3 × 11
(1)	1	=	32	×	-1	+	(35-32×1) × 11
	1	=	35	×	11	+	32 × (-12)

On a donc : 35 × 11 + 32 × (-12) = 1
puis en multipliant par 19 : 35 × 209 + 32 × (-228) = 19.

• Si x et y sont solutions de l'équation 35x + 32y = 19 :
35x + 32y = 19 et 35 × 209 + 32 × (-228) = 19
donc, par soustraction : 35(x - 209) + 32(y + 228) = 0
donc 35(x - 209) = 32(-228 - y). (*)
Or, 35 et 32 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 35 | -228 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -228 - y = 35k
et alors, d'après (*): x - 209 = 32k.

• Réciproquement, si x = 209 + 32k et y = -228 - 35k alors :
35x + 32y = 35(209 + 32k) + 32(-228 - 35k) = ... (à faire) = 19.

• Conclusion : les solutions de l'équation 70x + 64y = 38 sont les couples
(209 + 32k, -228 - 35k), où k entier relatif.

BONUS !

L'affirmation est vraie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \text{PGCD}(n, 10) \leqslant 10$ donc, comme $n > 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{10}{n}$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{10}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et ainsi, (u_n) est bien convergente.