Calcul intégral **Durée : 2h00**

11/05/21

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes (**donner les valeurs exactes**) :

1. $\int_{0}^{\ln(4)} \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} dt.$

2. $\int_{1}^{2} \left(t - \frac{2}{t^2} + 2 \right) dt.$

3. $\int_{2}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx.$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

1. Etudier la parité de f.

2. a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. a) Démontrer que, pour tout $x \geq 1, 1 - \frac{1}{x} = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$.

b) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que, pour tout $x \geq 1$,
$f(x) + 1 - \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} dt$.

c) Démontrer que, pour tout réel $x \geq 1, f(x) \geq \frac{1}{x} - 1$.

Exercice 3

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

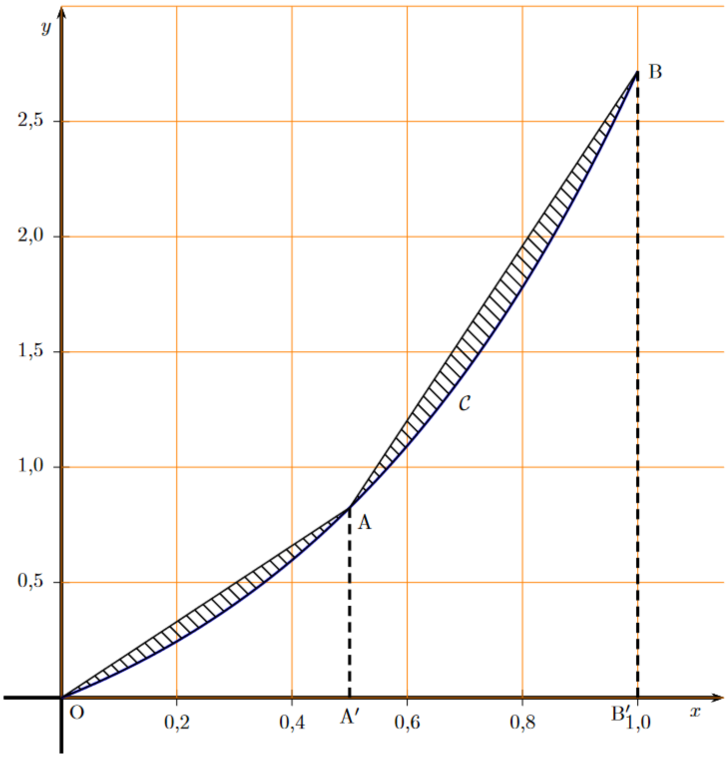
1. Soit la fonction f définie sur $[e\,;e^2]$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

a) Etudier les variations de la fonction f sur $[e\,;e^2]$.

b) Etablir un encadrement de $f(x)$ sur $[e\,;e^2]$.

c) En déduire que $\frac{2(e-1)}{e^3} \leq \int_e^{e^2} f(x)\,dx \leq \frac{e-1}{e}$.

2 . Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = xe^x$.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Sur la courbe $\mathcal{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathcal{C}$. On a placé les points $\mathrm{A}'(a\,;\,0)$ et $\mathrm{B}'(1\,;\,0)$.



a) Montrer que la fonction F définie sur [0 ; 1] par $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de f sur [0 ;1] et en déduire que $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$.

b) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}(-a^2e^a + ae^a - ae + e)$.

c) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2)$.

Exercice 4

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt.$$

1. Déterminer $J_{n+1} - J_n$ (sans calculer d'intégrale) puis démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. On définit la suite (I_n) pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt.$$

a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

b) En déduire que $J_n \leq I_n$.

3. a) Calculer I_n à l'aide d'une intégration par partie et montrer que $I_n = 3e^{-1} - (2+n)e^{-n}$.

b) Démontrer que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n). *Utiliser la question 3.a) et 2) b).*

b) Que peut-on conclure pour la suite (J_n) ?

Bonus !

1) Calculer à l'aide d'une IPP, $\int_1^4 \sqrt{t}dt$.

2) Soit pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{1/x} dx$.

a) Calculer I_2.

b) A l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

c) En déduire I_3.

d) Après avoir encadré I_n, étudier la limite de (I_n).

<u>**Barème indicatif**</u> **/20** **Ex 1 : 4,5** **Ex 2 : 5,5** **Ex 3 : 5** **Ex 4 : 5** **Bonus ! 2**