Corrigé du DS 8 (11/05/21)

Exercice 1

$$\int_0^{\ln(4)} \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(4)} \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}dt = \frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{2t})\right]_0^{\ln(4)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(17) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{17}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{17}{2}}\right).$$

$$\int_1^2 \left(t - \frac{2}{t^2} + 2\right)dt = \int_1^2 t\,dt - 2\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt + 2\int_1^2 dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + 2\left[\frac{1}{t}\right]_1^2 + 2\left[t\right]_1^2$$

$$= 2 - \frac{1}{2} + 1 - 2 + 4 - 2 = \frac{5}{2}.$$

$$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{x^3+1}\right]_2^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{28}-3\right)$$

$$= \frac{2}{3}2\sqrt{7} - 2 = \frac{4\sqrt{7}}{3} - 2.$$

Exercice 2

1. Pour tout réel x, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

   Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est paire, donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

   D'où $f(-x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -f(x)$. Ainsi, f est une fonction impaire.

2. a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   b. D'après la question précédente, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Soit un réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x}.$

   b. Soit un réel $x \geqslant 1$,

   $f(x) - \dfrac{1}{x} + 1 = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x} + 1$

   $= \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ d'après la question précédente

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \text{ par relation de Chasles}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \text{ par linéarité de l'intégrale}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

c. Pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} \geqslant 0$. Pour tout réel $x \geqslant 1$, d'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} \geqslant 0$. Donc $f(x) - \dfrac{1}{x} + 1 \geqslant 0$ d'où $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x} - 1$.

Exercice 3

1. a) On a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^2 - (\ln x).2x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$.

Sur l'intervalle $[e\,;e^2]$, le signe dépend de $1 - 2\ln x$ car $x > 0$ et $x^4 > 0$.

On a $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \leq 0 \Leftrightarrow 2\ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}(= \sqrt{e})$ et $\sqrt{e} \leq e$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	e		e^2
$f'(x)$		$-$	
f	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^4}$

b) On a d'après le tableau de variations sur $[e\,;e^2]$ et comme $\frac{2}{e^4} < \frac{1}{e^2}$ le minimum de f est $\frac{2}{e^4}$.

$$\frac{2}{e^4} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^2}$$

Soit en intégrant cet encadrement sur $[e\,;e^2]$:

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{e^4}\,dx \leq \int_e^{e^2} f(x)\,dx \leq \int_e^{e^2} \frac{1}{e^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow (e^2 - e)\frac{2}{e^4} \leq \int_e^{e^2} f(x)\,dx \leq (e^2 - e)\frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(e-1)}{e^3} \leq \int_e^{e^2} f(x)\,dx \leq \frac{e-1}{e}$$

2. a) Pour tout $x \in [0;1]$, $F'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[0;1]$.

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 1.$

b) $\mathscr{A}(OAA') = \frac{OA' \times AA'}{2} \frac{a \times f(a)}{2} = \frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a.$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABB'A') &= \frac{1}{2}A'B'(AA'+BB')\\ &= \frac{1}{2}(1-a)(f(a)+f(1))\\ &= \frac{1}{2}(1-a)(a\mathrm{e}^a+\mathrm{e})\\ &= \frac{1}{2}(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e})\end{aligned}$$

c.) L'aire de la partie hachurée est :

$\mathscr{A} = \mathscr{A}(OAA') + \mathscr{A}(ABA'B')-$aire sous la courbe de f sur $[0;1]$.

$\mathscr{A} = \frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a + \frac{1}{2}(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}) = \frac{1}{2}(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2).$

Exercice 4

1. Tout d'abord calculons la différence $J_{n+1} - J_n$:

$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt =$
$\int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt + \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$ (par la relation de Chasles).

Soit : $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$. Etudions maintenant, le signe de cette différence :

sur l'intervalle $[n\,;n+1]$, $e^{-t}\sqrt{1+t} > 0$. On en déduit donc la positivité de l'intégrale :

$\int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt > 0$. Soit pout tout entier n positif : $J_{n+1} - J_n > 0$. La suite $\boxed{(J_n) \text{ est bien croissante}}$.

2. a) $\sqrt{1+t} \leq 1+t \Leftrightarrow 1+t \leq (1+t)^2 \Leftrightarrow 1+t \leq 1+2t+t^2 \Leftrightarrow 0 \leq t(t+1)$ inégalité vraie pour $t \geq 1$. On a donc pour tout $t \geq 1, \sqrt{1+t} \leq 1+t$.

b) Pour tout $t \geq 1, \sqrt{1+t} \leq 1+t$ et $e^{-t} > 0$, d'où :
$\sqrt{1+t}e^{-t} \leq (1+t)e^{-t}$.
Donc pour tout $t \in [1\,;n], \sqrt{1+t}e^{-t} \leq (1+t)e^{-t}$.
Soit en intégrant sur l'intervalle considéré :
$\int_1^n \sqrt{1+t}e^{-t}\,dt \leq \int_1^n (1+t)e^{-t}dt.$
C'est-à-dire $\boxed{J_n \leq I_n}$.

3. a) Effectuons une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = 1+t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^t \end{array}$$

$I_n = [-(1+t)e^{-t}]_1^n + \int_1^n e^{-t}\,dt = -(1+n)e^{-n} + 2e^{-1} - [e^{-t}]_1^n = -(1+n)e^{-n} + 2e^{-1} - e^{-n} + e^{-1} = \boxed{3e^{-1} - (2+n)e^{-n}}$.

b) Pour tout entier n, on a $(2+n)e^{-n} > 0$, d'où $I_n < 3e^{-1}$.
De plus, on a démontré précédemment que pour tout entier $n, J_n \leq I_n$, on conclut donc que :
Pour tout entier n, $\boxed{J_n \leq 3e^{-1}}$.

c) La suite (J_n) est croissante et majorée par $3e^{-1}$, $\boxed{\text{elle est donc convergente}}$.