Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°4 de mathématiques** **Term - ME**

Thème : Matrices **17/05/21**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^2, A^3 et A^4 puis conjecturer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'expression de A^k en fonction de k.
2. Démontrer la conjecture précédente par un raisonnement par récurrence.
3. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente, l'expression de B^k en fonction de b et de k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;5\,;\ -2), B(7\,;\ -1\,;3)$ et $C(-2\,;7\,;\ -2)$ et on note P le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan P sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des réels.

On note $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.
2. En vérifiant que M est inversible, démontrer que le plan P a pour équation : $10x + 15y + 6z = 73$.

Exercice 3 *Vrai ou faux*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, **en justifiant la réponse**. **Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1** : La matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **Affirmation 2** : Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix}$.

   Il n'existe aucune valeur du réel t pour laquelle $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. **Affirmation 3** : Il existe une matrice carrée A d'ordre 3 telle que $A \neq I_3$ et $A^2 = I_3$.
4. **Affirmation 4** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Pour tout entier $n \geq 2, A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.

__Exercice au choix__

Vous traiterez __un seul__ des deux exercices A ou B. Vous indiquerez sur votre copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

__Exercice A__

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. En vérifiant rapidement que $A^2 = A + 2I_2$ en déduire une expression de A^3 puis de A^4 sous la forme $aA + bI_2$ où a et b sont des réels.
2. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,
$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}.$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel $n, A^n = r_nA + s_nI_2$.
3. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
4. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
5. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
6. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.

__Exercice B__

Soit $S = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ tels que } ad - bc = 1 \right\}$.

Partie 1

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.
2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S; les expliciter.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1 ; 2)$ est une solution particulière de cette équation.

b. En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Partie 2

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.
2. Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
   a. Calculer le produit AB. On admet que $AB = BA$.
   b. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.
   c. Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.
3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\binom{x'}{y'} = A\binom{x}{y}$
   a. Montrer que $x = dx' - by'$ On admet de même que $y = ay' - cx'$
   b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.
4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$
   En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

BONUS !

1) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une matrice N appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels. Puis démontrer que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions N_1 et N_2.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Exprimer pour tout $n \geq 1, A^n$ en fonction de n. *Utiliser la formule de Binôme.*

Barème probable **Ex 1 : 4** **Ex 2 : 3** **Ex 3 : 6** **Ex A/B : 7** **Bonus : 3**