Corrigé du DS n°4 (17/05/21)

Exercice 1

1. A l'aide de la calculatrice, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit la proposition P_k : « $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ ».

$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc P_1 est vraie.

Supposons P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, $A^{k+1} = A^k \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ k \times 1 + 1 \times 1 & k \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$

donc P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}}$.

3. En remarquant que $B = bA$, on déduit de la question précédente que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (bA)^k = b^k A^k = b^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{B^k = \begin{pmatrix} b^k & 0 \\ kb^k & b^k \end{pmatrix}}$.

Exercice 2

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Si le plan (ABC) a pour équation $ax + by + cz = 73$, alors les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire : $\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A = 73 \\ ax_B + by_B + cz_B = 73 \\ ax_C + by_C + cz_C = 73 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 5b - 2c = 73 \\ 7a - b + 3c = 73 \\ -2a + 7b - 2c = 73 \end{cases}$

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b - 2c \\ 7a - b + 3c \\ -2a + 7b - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix} = 73 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 73Y.$$

2. A l'aide de la calculatrice, on a $\det(M) = -73 \neq 0$ donc M est inversible.

D'où : $MX = 73Y \Leftrightarrow X = M^{-1}73X \Leftrightarrow X = 73M^{-1}Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Donc le plan P a pour équation : $10x + 15y + 6z = 73$.

Exercice 3

1. L'affirmation est fausse. On a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. L'affirmation est fausse, en effet :

$A^2 = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+6t & 3t-3t \\ 2t^2-2t^2 & 6t+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+6t & 0 \\ 0 & t^2+6t \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff t^2+6t = 1$

$t^2+6t = 1 \iff t^2+6t-1 = 0$; $\Delta = 6^2 - 4\times 1\times(-1) = 40 > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes ; il y a donc deux valeurs de t pour lesquelles $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce sont $-3+\sqrt{10}$ et $-3-\sqrt{10}$.

3. L'affirmation est VRAIE. Par exemple, si $A = -I_3$ alors A est une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A \neq I_3$ et $A^2 = (-I_3)^2 = (-1)^2 {I_3}^2 = I_3$.

4. L'affirmation est vraie, en effet :

On va démontrer par récurrence que la propriété $A^n = (2^n-1)A + (2-2^n)I_3$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 2$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

  $(2^n-1)A + (2-2^n)I_3$ devient

  $3A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = A^2$

  La propriété est donc vérifiée pour $n = 2$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour le rang $n \geqslant 2$ et on va démontrer qu'elle est vraie pour le rang $n+1$.

  Autrement dit, on suppose $A^n = (2^n-1)A + (2-2^n)I_3$ et on veut démontrer $A^{n+1} = \left(2^{n+1}-1\right)A + \left(2-2^{n+1}\right)I_3$.

  $A^{n+1} = A^n \times A = ((2^n-1)A + (2-2^n)I_3) \times A = (2^n-1)A^2 + (2-2^n)A$
  $= (2^n-1)(3A-2I_3) + 2A - 2^n A = 3\times 2^n A - 3A - 2^n \times 2I_3 + 2I_3 + 2A - 2^n A$
  $= 2\times 2^n A - A + 2I_3 - 2^{n+1} I_3 = 2^{n+1} A - A + 2I_3 - 2^{n+1} I_3$
  $= \left(2^{n+1}-1\right)A + \left(2-2^{n+1}\right)I_3$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 2 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 2$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

<u>**Exercice A**</u>

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

$A + 2I = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = A^2$.

2. En partant de l'égalité $A^2 = A + 2I$, on obtient en multipliant chaque membre par A :
$A^3 = A(A+2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$ et on recommence :
$A^4 = A \times A^3 = A(3A+2I) = 3A^2 + 2A = 3(A+2I) + 2A = 5A + 6I$.

3. Démonstration par récurrence :
Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I = 0A + 1I = r_0 A + s_0 I$. la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel p non nul, tel que $A^p = r_p A + s_p I$.
En multipliant chaque membre par A, on obtient :
$A \times A^p = A\left(r_p A + s_p I\right) \iff A^{p+1} = r_p A^2 + s_p A = r_p(A+2I) + s_p A =$
$\left(r_p + s_p\right)A + 2r_p I = r_{p+1} A + s_{p+1} I$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$A^n = r_n A + s_n I$.

4. On a pour tout entier naturel n :
$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n = -(r_n - s_n) = -k_n$.
L'égalité $k_{n+1} = -k_n$ montre que la suite (k_n) est géométrique de raison -1.
On sait qu'alors $k_n = k_0(-1)^n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

4. Comme (t_n) est géométrique de raison 2, on a $t_n = t_0 2^n = \frac{2^n}{3}$.

5. $r_n = t_n - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}$.

$s_n = r_n - k_n = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} - (-1)^{n+1} = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} + (-1)^n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}(-1)^n$.

6. $A^n = r_n A + s_n I_2 = \begin{pmatrix} -4r_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix}$.

Soit $A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$

Exercice B

Partie 1

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$. Or $6 \times (-4) - (-5) \times 5 = -24 + 25 = 1$ donc $A \in S$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ une matrice. $A \in S \iff ad - 6 = 1 \iff ad = 7$.

Le nombre 7 se décompose ainsi : $7 = 7 \times 1 = 1 \times 7 = (-7) \times (-1) = (-1) \times (-7)$.

Les quatre matrices sont donc $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

3. **a.** On résout dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x - 2y = 1$.

Puisque le couple $(1 ; 2)$ est une solution de cette équation, on a :

$$\begin{array}{rccccc} & 5x & - & 2y & = & 1 \\ & 5 \times 1 & - & 2 \times 2 & = & 1 \\ \hline \text{par soustraction} & 5(x-1) & - & 2(y-2) & = & 0 \end{array}$$

et donc $5(x-1) = 2(y-2)$

5 divise $2(y-2)$ et est premier avec 2 donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y-2$: $y - 2 = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ d'où $y = 2 + 5k$.

On remplace y par $5 + 2k$ dans l'équation; on obtient :$5(x-1) = 2 \times 5k$ d'où $x - 1 = 2k$ qui donne $x = 1 + 2k$.

Réciproquement, les couples $(1 + 2k ; 2 + 5k)$ sont solutions car $5(1 + 2k) - 2(2 + 5k) = 5 + 10k - 4 - 10k = 1$.

L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{(1 + 2k ; 2 + 5k)_{k \in \mathbb{Z}}\right\}}$

b. Une matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ appartient à S si, et seulement si, $5a - 2b = 1$, donc si, et seulement si, $a = 1 + 2k$ et $b = 2 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ces matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 + 2k & 2 + 5k \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partie 2

1. Puisque $A \in S$, $ad - bc = 1 \iff ad + b \times (-c) = 1$; alors, d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

2. Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   a. $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ donc $\boxed{AB = I}$.

   On admet que $BA = AB$ donc $\boxed{BA = I}$.

   b. $AB = BA = I$ donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = B}$.

   c. $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$: $da - (-c) \times (-b) = ad - bc = 1$ donc $\boxed{A^{-1} \in S}$.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   a. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   On en déduit, en multipliant à gauche par B : $B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puisque $BA = I$.

   Alors : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

   On en déduit $\boxed{\begin{cases} x = dx' - by' \\ y = -cx' + ay' \end{cases}}$.

   b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'.
   D' divise donc x' et y' donc divise $x = dx' - by'$ et $y = -cx' + ay'$; D' divise donc D.
   De même : $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ donc D qui divise x et y divise aussi x' et y' et divise alors aussi leur PGCD D'.
   D divise D' et D' divise D donc $\boxed{D = D'}$.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$

   On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$ car $2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$.

   Nous sommes donc dans la situation précédente.
   On en déduit que $\text{PGCD}\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right) = \text{PGCD}\left(x_n\ ;\ y_n\right)$.
   En cascade, on en déduit que ce PGCD est celui de $x_0 = 2019$ et de $y_0 = 673$.
   Or $2019 = 3 \times 673$ donc leur PGCD est 673.
   On en déduirait (par récurrence) que, pour tout n, $\boxed{\text{PGCD}\left(x_n\ ;\ y_n\right) = 673}$