Lycée militaire de Saint-Cyr **Interrogation de mathématiques** **Term**

Thème : Intégration **20/05/21**

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes **en donnant la valeur exacte** (en simplifiant au maximum).

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} t e^{-t^2} dt,$$

$$J = \int_0^2 \frac{1}{1+u} du - \int_1^2 \frac{1}{1+u} du.$$

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx.$$

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$. Et *C* la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère du plan.

1. Démontrer que $f(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[\frac{1}{e}\,;\,+\infty[$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose I_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe *C* et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Montrer que la fonction *F*, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty]$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln x}{x}$, est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty]$.

b) Calculer l'aire I_n et montrer que $I_n = -\dfrac{2}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n} + e$.

c) Etudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

BONUS !

1) Calculer en utilisant une intégration par parties $I = \int_1^2 (x+1)\ln x \; dx$.

2) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Démontrer que pour tout $n \geq 1, u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

Barème probable **Ex 1 : 7,5** **Ex 2 : 7,5** **Bonus : 2**

Corrigé de de l'interrogation (20/05/21)

Exercice 1

$$I=\int_0^1 \frac{1}{2}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t^2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(1-e^{-1}\right).$$

$$J=\int_0^2 \frac{1}{1+u}du-\int_1^2 \frac{1}{1+u}du=\int_0^2 \frac{1}{1+u}du+\int_2^1 \frac{1}{1+u}du=\int_0^1 \frac{1}{1+u}du=\left[\ln(1+u)\right]_0^1=\ln 2.$$

$$K=\left[\tfrac{2}{3}\sqrt{1+3x}\right]_0^1=\tfrac{2}{3}.$$

Exercice 2

1. On a $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{x^4}\geq 0 \Leftrightarrow 1+\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq e^{-1}$.

On a donc $f(x)\geq 0$ sur $[\frac{1}{e}\ ;\ +\infty[$

2. a) On a $F'(x)=f(x)$. Donc F est bien une primitive de f.

b) $I_n=\displaystyle\int_{1/e}^{n} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{1/e}^{n}=F(n)-F(1/e)=\frac{-2-\ln(n)}{n}-\frac{-2-\ln(1/e)}{1/e}$

$$=\frac{-2-\ln(n)}{n}-\frac{-2+1}{1/e}=\frac{-2-\ln(n)}{n}+e.\ \text{ soit } I_n=-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}+e.$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n}=0.$ On conclut donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=e.$

Graphiquement, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=n$ tend vers e lorsque n tend vers plus l'infini.

Bonus

1) $I=4\ln 2-\frac{7}{4}$.

2) $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^n dx$ car $x^{n+1}-x^n=x^n(x+1)$.