Corrigé du DS n°1

Exercice 1 5,5

1. a) $2A-3B=\begin{pmatrix}-4 & 10\\ 19 & 9\end{pmatrix}$ 1

b) $AB=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 19 & -5\end{pmatrix}$ 1 et $BA=\begin{pmatrix}-18 & 10\\ -28 & 18\end{pmatrix}$ 1

2. a) Le calcul de C^2 n'est pas possible car le nombre de colonnes de C n'est pas égale au nombre de lignes de C. 0,5

b) $CD=\begin{pmatrix}6 & -10{,}1\\ 130{,}1 & -4\end{pmatrix}$ 1 et $DC=\begin{pmatrix}0 & -1{,}99 & -2{,}99\\ 200 & 2 & 2\\ 299 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 1

Exercice 2 2

$A=B \iff \begin{cases}2x^2=18\\ y^2+4=4y\end{cases} \iff \begin{cases}x^2=9\\ y^2-4y+4=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=3 \text{ ou } x=-3\\ (y-2)^2=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x=3 \text{ ou } x=-3\\ y=2\end{cases}$

-0,25 si pas de conclusion

$S=\{(3;2)\ ,\ (-3;2)\}$

Exercice 3 3

1. L'affirmation est fausse. On a $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 1

2. L'affirmation est fausse, en effet :

$$A^2=\begin{pmatrix}t & 3\\ 2t & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 3\\ 2t & -t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2+6t & 3t-3t\\ 2t^2-2t^2 & 6t+t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2+6t & 0\\ 0 & t^2+6t\end{pmatrix}$$ 1

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \iff t^2+6t=1$

$t^2+6t=1 \iff t^2+6t-1=0$; $\Delta=6^2-4\times1\times(-1)=40>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes ; il y a donc deux valeurs de t pour lesquelles $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ce sont $-3+\sqrt{10}$ et $-3-\sqrt{10}$.

3. L'affirmation est VRAIE. Par exemple, si $A=-I_3$ alors A est une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A\neq I_3$ et $A^2=(-I_3)^2=(-1)^2{I_3}^2=I_3$. 1

Exercice 4 (5)

1. [redacted] on trouve $A^2 = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$ et $A^4\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$. 1,5

1. On peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. 0,5

2. Soit la proposition P_k : « $A^k = \begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$ ».
   $A^1 = A = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ donc P_1 est vraie. 1
   Supposons P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.
   Alors, $A^{k+1} = A^k \times A = \begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+0\times1 & 1\times0+0\times1\\ k\times1+1\times1 & k\times0+1\times1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\k+1&1\end{pmatrix}$ 1,5
   donc P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = \begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}}$. 0,5

3. En remarquant que $B = bA$, on déduit de la question précédente que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (bA)^k = b^k A^k = b^k\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{B^k = \begin{pmatrix}b^k&0\\kb^k&b^k\end{pmatrix}}$.

Exercice 5 (2,5)

1. $\det A = -4-6 = -10 \neq 0$ donc A est inversible. 0,5
2. $A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ 1
3. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$
   $(S) \iff AX = B \iff X = A^{-1}B = \begin{pmatrix}-\frac{3}{10}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ 1
   Donc $(x;y) = \left(-\frac{3}{10}; -\frac{2}{5}\right)$

Exercice 6 (3)

1. $\boxed{A(A-2I_2)} = A^2 - 2A = \begin{pmatrix}10&6\\6&10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&6\\6&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix} = 8I_2$ 1
2. $A(A-2I_2) = 8I_2 \iff \frac{1}{8}A(A-2I_2) = I_2 \iff A\frac{1}{8}(A-2I_2) = I_2$
   $\iff A^{-1} = \frac{1}{8}(A-2I_2$

   $A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$