Thème : Suites et fonctions **11/10/21**

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$.

b) $\lim_{n\to+\infty} 3^n - 2^n$.

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

En encadrant u_n au préalable, déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n^3 - \sqrt{n^2+5}$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n par $v_n \leq -n^3$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 2

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1. Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 2.

2. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) definie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Conjecturer le sens de variations à l'aide des calculs des 1ers termes.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n+1$.

3. a) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation de la suite.

b) Déterminer la limite de (u_n) puis démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ en utilisant la question **2.**

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;4]$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$$

3. En déduire d'après la question précédente que la suite (u_n) converge.

4. En supposant que $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et que $l = \frac{2+3l}{4+l}$, déterminer la limite de la suite (u_n).

Tourner la page

Exercice 5

Soit le tableau de variations ci-dessous décrit les variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4

1. Donner les limites de la fonction f. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes et donner les asymptotes éventuelles.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+1}{3x^3-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} - \frac{1}{2}$.

BONUS !

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n\times(n+1)}$.

   En remarquant que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Puis, déterminer la limite de S_n.

2. On considère la suite de terme général :

$$v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

   Démontrer que $\frac{n}{n+1} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Barème probable **Ex 1 : 4 Ex 2 : 3 Ex 3 : 3.5 Ex 4 : 4 Ex 5 : 2.5 Ex 6 : 3 Bonus : 2**