Exercice 1

Le but de cet exercice est de mettre en évidence deux suites numériques $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers $\ln x$, l'une par valeurs inférieures et l'autre par valeurs supérieures.
Les parties I et II sont indépendantes. La partie III se sert des deux premières.

Partie I : Inégalités préliminaires

On pose deux fonctions T et S de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$T(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad S(x) = \frac{x^2-1}{2x}$$

1. Démontrer que $\forall x \geq 1$,

$$T(x) \leq 2T(\sqrt{x}) \qquad \text{et} \qquad 2S(\sqrt{x}) \leq S(x).$$

   Indication : on pourra se souvenir que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

2. A l'aide d'études de fonctions, montrer que $\forall x > 1$:

$$T(x) \leq \ln x \leq S(x)$$

Partie II : Etude d'une suite définie par récurrence

On fixe un $x > 1$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Démontrer que $\forall y > 1$, $\sqrt{y} - 1 \leq \frac{1}{2}(y-1)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}(x-1)$$

   et en déduire la limite de u_n en $+\infty$.

Partie III : Encadrement de $\ln x$

On considère les suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_n = 2^n T(u_n) \qquad \text{et} \qquad S_n = 2^n S(u_n).$$

1. En partant des inégalités de la question I.1., montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer par récurrence que $\ln(u_n) = \dfrac{1}{2^n}\ln x$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq \ln x \leq S_n$.
4. Montrer que le rapport $\dfrac{S_n}{T_n}$ admet une limite en $+\infty$, en précisant la valeur de cette limite. On pourra utiliser le résultat de la question II.3. sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que les suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ln x$.

Exercice 2

On souhaite prouver l'encadrement suivant :

Théorème Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $$\frac{6}{x+4\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{\ln x}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2) **a)** Étudier le signe de la fonction $x \longmapsto \ln x - \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{\ln x}{x-1} \geqslant \dfrac{6}{x+4\sqrt{x}+1}$.

Exercice 3

1)

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

b) En déduire que pour tous $x, y, z > 0$ de somme s :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 6 - s.$$

2) **a)** Montrer que : $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

b) En déduire que pour tous $x, y, z \geqslant 0$:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

c) En déduire, après avoir développé le produit : $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$, que pour tous $x, y, z > 0$ de somme s : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geqslant \dfrac{9}{s}$.

3) Des inégalités **1)b)** et **2)c)**, l'une est-elle meilleure que l'autre, et si oui laquelle ?

Exercice 4

1) **a)** Montrer que : $1 + \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{k^2}{(k-1)(k+1)}$ pour tout $k \geqslant 2$.

b) En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}$.

Exercice 5

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $p_0 = 0$, et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ p_{n+1} = 3p_n + 3^{n+1}(2n+1) \qquad (E)$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer le terme général de cette suite par deux méthodes indépendantes. On ne pourra donc pas utiliser le résultat de la question 1 dans la question 2.

1. **Première méthode.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 3^n\, n^2$.
2. **Deuxième méthode.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n = \dfrac{p_n}{3^n}$.
   (a) A l'aide de (E), montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_{k+1} - r_k = 2k+1$.
   (b) En utilisant un télescopage, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de r_n en fonction de n, puis celle de p_n.

Exercice 6

Dans cet exercice, on cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

Soit f une fonction solution.

1. Montrer que $f(0)$ vaut 0 ou -1.
2. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'alors, f est la fonction nulle (autrement dit que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 0$). En déduire une contradiction.
3. Montrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.
   Indication : cela est équivalent à montrer que $f(1) \times f(-1) = 0$.
4. Montrer que si $f(1) = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t-1$,
   et que si $f(-1) = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = -t-1$.
5. Conclure l'exercice.

Exercice 7

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient que pour tout $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\,(f(x) + f(y)) \qquad \text{(F)}$$

On se fixe une fonction solution $f \in \mathcal{F}$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Démontrer que f est paire.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(nx) = n^2 f(x)$.
4. En déduire que cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que $\forall q \in \mathbb{Z}^*$, $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{1}{q^2} f(1)$.
   Indice : on pourra utiliser la relation précédente pour un x et un n bien choisis.
6. Si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, exprimer $f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ en fonction de $\dfrac{p}{q}$ et $f(1)$.
7. A l'aide de la question précédente, déterminer toutes les fonctions de $\mathcal{F}$.

Exercice 8

On pose : $\mathcal{H} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \right\}$ et $\mathcal{E} = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc > 0 \right\}$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé le *demi-plan de Poincaré*.

On appelle *homographie de* $\mathcal{H}$ toute fonction définie sur $\mathcal{H}$ de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathcal{E}$.

1) Vérifier que $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ est une homographie de $\mathcal{H}$, ainsi que les fonctions $z \longmapsto az+b$ pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

2) Soit $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie de $\mathcal{H}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathcal{E}$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathcal{H}$: $\operatorname{Im}\big(h(z)\big) = \lambda \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ où λ est un réel indépendant de z à préciser.

b) En déduire que h est à valeurs dans $\mathcal{H}$.

On définit des parties de $\mathcal{H}$, appelées les *droites de* $\mathcal{H}$, en posant pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$D_1(x) = \left\{ x + \mathrm{i}y \mid y > 0 \right\} \quad \text{et} \quad D_2(x,r) = \left\{ x + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in]0,\pi[\right\}.$$

On rappelle que pour toute partie D de $\mathbb{C}$, toute fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et toute partie D' de D, on appelle *image de D' par f* et on note $f(D')$ l'ensemble : $f(D') = \left\{ f(x) \mid x \in D' \right\}$. Par exemple, en notant exp la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs : $\exp(\mathrm{i}\mathbb{R}) = \left\{ \mathrm{e}^z \mid z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{U}$.

3) Représenter graphiquement les ensembles $D_1(x)$ et $D_2(x,r)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

4) Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On note h l'homographie $z \longmapsto az+b$ de $\mathcal{H}$. Compléter pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$h\big(D_1(x)\big) = D_1(\ldots) \qquad \text{et} \qquad h\big(D_2(x,r)\big) = D_2(\ldots\,,\,\ldots).$$

On note désormais φ l'homographie $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ de $\mathcal{H}$.

5) **a)** Déterminer $\varphi\big(D_1(0)\big)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $\varphi\big(D_2(x,x)\big) = D_1\left(-\dfrac{1}{2x}\right)$. On pourra commencer par montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi\big(x + x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + \dfrac{1}{2x}$ est un imaginaire pur.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\varphi\big(D_1(x)\big)$ est une droite de $\mathcal{H}$ que l'on précisera. On pourra commencer par mettre $\varphi(x+\mathrm{i}y) + \dfrac{1}{2x}$ sous forme trigonométrique pour tout $y > 0$, en distinguant bien les cas : $x > 0$ et $x < 0$.

On ADMET pour gagner du temps que $\varphi\big(D_2(-x,x)\big)$ est également une droite de $\mathcal{H}$ pour tout $x > 0$.

6) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ distinct de $|x|$.

a) **(Difficile)** Montrer que pour tout $z \in \mathcal{H}$: $|z - x| = r \iff \left| z' - \dfrac{x}{r^2 - x^2} \right| = \dfrac{r}{|r^2 - x^2|}$ où : $z' = \varphi(z)$.

b) En déduire que $\varphi\big(D_2(x,r)\big)$ est une droite de $\mathcal{H}$ que l'on précisera.

D'après les questions **5)** et **6)**, φ envoie finalement toute droite de $\mathcal{H}$ sur une droite de $\mathcal{H}$.

7) Montrer que toute homographie de $\mathcal{H}$ envoie toute droite de $\mathcal{H}$ sur une droite de $\mathcal{H}$. On pourra observer que pour tous $(a,b,c,d) \in \mathcal{E}$ et $z \in \mathcal{H}$: $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c^2 z + cd}$ si : $c \neq 0$.

Exercice 9

Montrer que l'équation : $4^m + 11^n = x^2$ d'inconnue $(m,n,x) \in \mathbb{N}^3$ n'a pas de solution. On pourra s'intéresser à la parité/imparité de n en raisonnant modulo 3 et modulo 4.