Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°3 de mathématiques** **Term**

Fonction ln **Durée : 1h30**

7/12/21

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre :

a. $\ln(x^2-1) = -\ln 2$;

b. $e^{2\ln(x+1)} = \ln(e^4)$;

c. $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(5x)$.

2. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e^2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n e^{-1}} \end{cases}$$

Soit (v_n) la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1+\ln(u_n)}{2}$.

a. Démontrer que (v_n) est géométrique dont on précisera sa raison et son 1er terme.

b. En déduire v_n en fonction de n.

c. Déterminer u_n en fonction de n.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute. Si sa masse initiale était de 1 kg, au bout de combien de temps est-elle inférieure à 1 g ?

4. Déterminer les deux limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \ln(x^3)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

Exercice 2

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

2. $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{e}\right)$

3. $f(x) = \ln(2x^2-2x+1) - \frac{1}{2}x^2 + 2$.

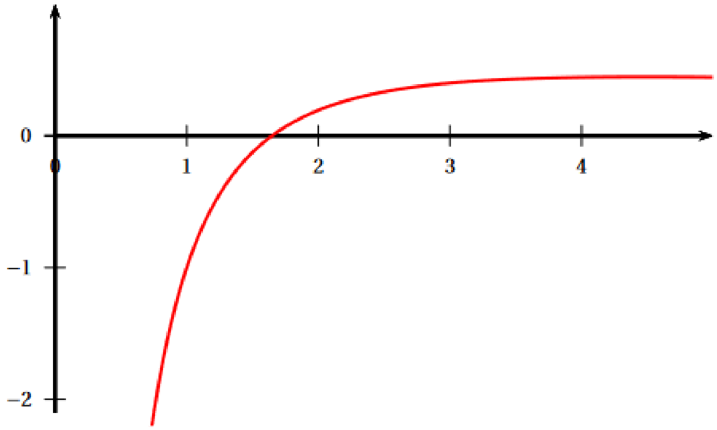
4. $f(x) = \ln(\ln x)$.

Exercice 3

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0{,}25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Bonus !

1. Démontrer que $\forall x > 0,\ \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

<u>Barème probable</u> /20 **Ex 1 : 9 Ex 2 : 4 Ex 3 : 7 Bonus ! 3**