Corrigé du DS n°3 (07/12/21)

Exercice 1

1. a) $D =]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$. $S = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\,\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.
   b) $D =]-1\,;\,+\infty[$. $S = \{1\}$.
   c) $D =]0\,;2[$ et $S =]0\,;1]$.
2. a) On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1+\ln(u_{n+1})}{2}}{\frac{1+\ln(u_n)}{2}} = \frac{1+\ln(u_{n+1})}{1+\ln(u_n)} = \frac{1+\ln\left(\sqrt{u_n e^{-1}}\right)}{1+\ln(u_n)} = \frac{1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-\frac{1}{2}\ln e}{1+\ln u_n} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u_n)}{1+\ln(u_n)} = \frac{\frac{1}{2}(1+\ln(u_n))}{1+\ln(u_n)} = \frac{1}{2}$.
   La suite est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et le 1er terme est $v_0 = \frac{1+\ln e^2}{2} = \frac{1+2\ln e}{2} = \frac{3}{2}$.
   b) D'après la question précédente, $v_n = v_0 q^n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c) Comme $v_n = \frac{1+\ln(u_n)}{2}$, on a $1+\ln(u_n) = 2v_n \Leftrightarrow \ln(u_n) = 2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = e^{2v_n-1} \Leftrightarrow$ $u_n = e^{2\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$ soit $u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$.
3. D'après le contexte, l'inéquation à résoudre est la suivante :

   $$1000\times\left(1-\frac{10}{100}\right)^n \le 1$$ soit encore :

   $$\ln\left(1000\times\left(1-\frac{10}{100}\right)^n\right) \le \ln 1 \Leftrightarrow \ln 1000 + \ln\left(\left(1-\frac{10}{100}\right)^n\right) \le 0$$

   $$\Leftrightarrow n\ln\left(1-\frac{10}{100}\right) \le -\ln 1000 \Leftrightarrow n \ge \frac{-\ln 1000}{\ln\left(1-\frac{10}{100}\right)}.$$

   Or, $$\frac{-\ln 1000}{\ln\left(1-\frac{10}{100}\right)} \approx 65{,}56.$$

   Donc au bout de 66 min soit 1h06 un bloc de glace passe de 1kg à 1g.

4.

Exercice 2

Exercice 3

Partie I

1. Dans $]0\,;\,+\infty[$, $f(x)=0 \iff \dfrac{2\ln(x)-1}{x}=0$, on a donc

$2\ln(x)-1=0 \iff 2\ln(x)=1 \iff \ln(x)=\dfrac{1}{2} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

$S=\left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Rem. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}\approx 1{,}649\approx 1{,}65$ au centième près.

2.
- Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x)<0$;
- Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $f(x)>0$;
- $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=0$.

Partie II

$$g(x)=[\ln(x)]^2-\ln(x).$$

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty$, donc par somme de limites :

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

b. $g(x)=\ln(x)[\ln(x)-1]$. Comme

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-1=+\infty$, on obtient par produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2. La fonction $g(x)=\ln(x)[\ln(x)-1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x)=\dfrac{1}{x}\times[\ln(x)-1]+\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}[\ln(x)-1+\ln(x)]=\dfrac{1}{x}\times(2\ln(x)-1)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}=f(x)$.

3. Le signe de $f(x)=g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I ; on a donc :
- Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $g'(x)<0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle
- Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $g'(x)>0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle
- $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=0$: $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme $-\frac{1}{4}=-0{,}25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x)=m$, avec $m>-0{,}25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, l'autre sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

5. Dans $]0\,;\,+\infty[$, $g(x)=0 \iff \ln(x)[\ln(x)-1]=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl}\ln(x)&=&0\\ \ln(x)-1&=&0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl}\ln(x)&=&0\\ \ln(x)&=&1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&1\\ x&=&\mathrm{e}\end{array}\right.$

$S=\{1\,;\,\mathrm{e}\}$.