Sujet C

Exercice

Soit h un réel fixé, élément de l'intervalle $]0,\pi]$ et f la fonction paire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = \frac{1}{2h} \text{ si } t \in [0,h], \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]h,\pi].$$

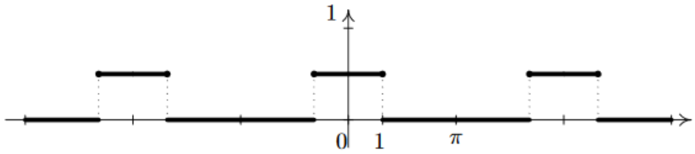
1. Représenter la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$ (on pourra prendre $h = 1$ pour la représentation).
2. Déterminer la série de Fourier de f et prouver qu'elle converge. On notera :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$$

3. En déduire la valeur de $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n}$.
4. Quelle est la valeur de $S_f(h)$? Justifier ce résultat. En déduire la valeur de $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n}$.
5. Déterminer, en utilisant la formule de Parseval, la valeur $C = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2}$.
6. En prenant une valeur bien choisie pour h, déduire des questions précédentes, les valeurs de :

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \qquad E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Correction ex



2. La fonction f étant paire, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = 0$. De plus :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{h} \frac{1}{2h}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}$$

et pour $k \geqslant 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{h} \frac{\cos(kt)}{2h}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi h}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^h = \frac{1}{\pi k}\frac{\sin(kh)}{h}$$

La série de Fourier de f est donc la série de terme général :

$$\boxed{S_{n,f}(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kh)}{kh}\cos(kt)}$$

La fonction f étant 2π-périodique et clairement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut utiliser le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge en tout point.}}$$

On peut même préciser cette limite pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{S_f(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh}\cos(nt) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

3. Pour $t = 0$, cette dernière relation donne :

$$S_f(0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh} = \frac{1}{2h}$$

D'où la valeur qui en découle :

$$\boxed{A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n} = \frac{\pi - h}{2}}$$

4. Pour $t = h \in]0, \pi[$, on obtient cette fois-ci :

$$S_f(h) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh}\cos(nh) = \frac{0 + \frac{1}{2h}}{2} = \frac{1}{4h}$$

On a, en reformulant avec $\sin(nh)\cos(nh) = \dfrac{1}{2}\sin(2nh)$:

$$\frac{1}{2\pi h}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n} = \frac{0 + \frac{1}{2h}}{2} = \frac{1}{4h} - \frac{1}{2\pi}$$

Simplifions :

$$\boxed{B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n} = \frac{\pi}{2} - h}$$

5. La formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2h^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^h \frac{1}{4h^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi h}$$

Isolons la valeur cherchée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2} = 2\pi^2h^2 \left(\frac{1}{4\pi h} - \frac{1}{4\pi^2} \right) = \frac{\pi h}{2} - \frac{h^2}{2}$$

Il est donc établi que :

$$\boxed{C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2} = \frac{\pi h}{2} - \frac{h^2}{2}}$$

6. En prenant une valeur $h = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient en utilisant la valeur de B :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. D'où :

$$\boxed{D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

En prenant une valeur $h = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient en utilisant la valeur de C :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. D'où :

$$\boxed{E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Enfin $\displaystyle F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = E + \frac{1}{4}F$ donc $\dfrac{3}{4}E = F$.

$$\boxed{F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$