Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

*Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.*

1. Déterminer le 1er terme u_0 et la raison r de la suite arithmétique (u_n) définie de la façon suivante : $\mathrm{u}_3 = 2019$ et $\mathrm{u}_{2019} = 3$.

2. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{10} u_k$ où (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $u_0 = 3$.

b) $\sum_{k=0}^{100} k$

c) $S = 12 + 15 + 18 + \cdots + 1002$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{u_n-3}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

2. Démontrer que la suite (v_n) arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$. Donner son 1er terme.

3. a) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3

Un infographiste simule sur ordinateur la croissance d'un bambou. Il prend pour modèle un bambou d'une taille de 1 m dont la taille augmente d'un mois sur l'autre de 5 % auxquels s'ajoutent 20 cm. Pour tout entier naturel *n* non nul, on note u_n la taille, exprimée en centimètre, qu'aurait le bambou à la fin du *n*-ième mois, et $u_0 = 100$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Expliquer pourquoi, pour tout naturel $n, u_{n+1} = 1{,}05u_n + 20$.

3. Pour tout *n* entier naturel, on pose : $v_n = u_n + 400$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de *n*.

c) Calculer la taille du bambou, au centimètre près, à la fin du 7e mois.

Exercice 4

Soit la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{4x^2-2x-1}{2x}$ On appelle C_g la courbe représentative de la fonction *g* dans un repère orthonormé (O ; I, J).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{2x}$.

2. a) Calculer la fonction dérivée de $g, g'(x)$.

b) Déterminer le tableau de variations de la fonction *g*.

3. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, 4x^2 - 2x - 1 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

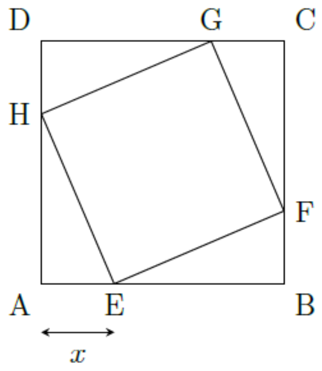
b) Démontrer que C_g coupe l'axe des abscisses.

4. Soit la droite D d'équation $y = 2x - 1$. Etudier la position relative entre D et C_g.

Exercice 5

On considère un carré ABCD de côté AB=1. EFGH est un carré tel que :

- Les points E, F, G, H appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
- $AE = BF = CG = DH = x$ avec $0 \leq x \leq 1$.



Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de EFGH est minimale.

BONUS !

On considère la suite (s_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$s_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n)$$

1. Déterminer s_1 et s_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$s_{n+1} = s_n + 3(n+1)$$
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$s_n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

Barème probable **Ex 1 :** **Ex 2 :** **Ex 3 :** **Ex 4 :** **Ex 5 :** **Bonus : 2**