Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°1 de mathématiques** **Term - Spé**

Thème : Suites **26/09/22**

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 - 5n + \sqrt{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2-1}{2-3n^2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{n} + \sqrt{3}$

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = -\frac{\cos(2n)}{4n}$.

En encadrant u_n au préalable, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse **sans justifier** :

« On considère deux suites (u_n) et (v_n). Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge »

Exercice 2

Soit la suite (u_n) definie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+1}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$

2. Vérifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$

3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. Démontrer que la suite (u_n) converge. En notant, $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, déterminer l.

5. Bonus On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Démontrer que (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) definie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

On suppose admis l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{0 \leq u_n \leq 1}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. En déduire que la suite (u_n) converge (**sans calculer cette limite !)**

3. On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On précisera son 1er terme.

4. Exprimer v_n en fonction de n. Puis en déduire que *:* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1 - 0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace()
   u = 0,6
   n = 0
   while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
   return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

BONUS ! ***La suite de Héron***[1]

Soit a un réel strictement positif.

On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geq \sqrt{a}$.
2. Démontrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Barème probable **Ex 1 :** **Ex 2 :** **Ex 3 :** **Ex 4 :** **Bonus : 3.5**

[1] *On sait peu de choses sur la vie de Héron d'Alexandrie. Sans doute égyptien, il est pénétré de culture grecque et babylonienne, et son savoir est encyclopédique. Il écrit de nombreux traités ; quatorze nous sont parvenus, dont Pneumatica, Caloptrica et Geometrica. Les travaux mathématiques de Héron concernent avant tout la géométrie et ses applications pratiques (recherche de volumes des théâtres ou des thermes).*

Corrigé du DS 1

Exercice 1

1. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2-5n+\sqrt{2}=+\infty$

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2-1}{2-3n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(6-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}-3\right)}=\frac{6}{-3}=-2.$

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{n}+\sqrt{3}=\sqrt{3}.$

2. On a pour tout n entier naturel non nul, $-\frac{1}{4n}\leq-\frac{\cos(2n)}{4n}\leq\frac{1}{4n}$. Par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\cos(2n)}{4n}=\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{4n}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4n}=0.$

3. Proposition fausse.

Exercice 2

1. Soit P(n) la propriété : « $1\leq u_n\leq 2$ » pour n entier naturel.

- Initialisation : On a $u_0=2$ et $1\leq 2\leq 2$ donc P(0) est vraie.
- Hérédité : On suppose pour un entier naturel n que P(n) est vraie. Montrons que P(n+1) est vraie.

On a :

$$1\leq u_n\leq 2$$
$$2\leq u_n+1\leq 3$$
$$\frac{1}{3}\leq\frac{1}{u_n+1}\leq\frac{1}{2}$$
$$-2\leq\frac{-4}{u_n+1}\leq-\frac{4}{3}$$
$$1\leq 3-\frac{4}{u_n+1}\leq 3-\frac{4}{3}\leq\frac{5}{3}$$
$$1\leq u_{n+1}\leq 2$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

- Conclusion : $\forall\, n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n\leq 2.$

2. $u_{n+1}-u_n=3-\frac{4}{u_n+1}-u_n=\frac{3u_n+3}{u_n+1}-\frac{4}{u_n+1}-\frac{u_n^2+u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+1}=-\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n+1}=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}.$

3. Comme $u_n\geq 1$, on a $u_n+1>0$ et $(u_n-1)^2\geq 0$ soit $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}\leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc par le théorème de cv monotone, (u_n) converge. Soit $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On a aussi $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ et donc par la définition de la suite (u_n), on a : $l=3-\frac{4}{l+1}\Leftrightarrow l^2+l=3l+3-4\Leftrightarrow l^2-2l+1=0\Leftrightarrow(l-1)^2=0\Leftrightarrow l=1.$
   On conclut que la limite de la suite (u_n) est 1.

5. Comme pour tout entier naturel n $u_n\geq 1$, on a en particulier $u_0\geq 1, u_1\geq 1, u_2\geq 1$ .... et donc $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n\geq 1+1+1+\cdots+1\geq n+1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$, on en déduit par le théorème de comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty.$

Exercice 3

1. $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{1-u_n^2}{u_n+2}=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}.$
   Or $u_n\leq 1$ soit $1-u_n\geq 0$ et $1+u_n>0$ et $u_n+2>0$ puisque $u_n\geq 0$. Donc $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}\geq 0$ et la suite (u_n) est bien croissante.

2. Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par par 1 par le théorème de cv monotone, la suite (u_n) converge.

3. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}}{\frac{u_n-1}{u_n+1}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2}+1}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}$$
$$=\frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+2}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{u_n-1}{3(u_n+1)}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{1}{3}$$

On conclut que la suite (u_n) est géométrique de raison 1/3 et de 1[er] terme $v_0=-1$.

4. Par ce qui précède, on en déduit que $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

De plus, $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}\Leftrightarrow v_n.u_n+v_n=u_n-1\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-v_n-1\Leftrightarrow u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}=\frac{1+v_n}{1-v_n}$

Soit encore $u_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

6. Puisque $0<\frac{1}{3}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}-\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ et on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 4

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1=0,75u_0\times(1-0,15u_0)=0,75\times0,6\times(1-0,15\times0,6)=0,45\times(1-0,09)=0,45\times0,91=0,4095$ soit environ 410 individus.

• 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2=0,75u_1\times(1-0,15u_1)=0,75\times0,4095\times(1-0,15\times0,4095)=0,307\,125\times(1-0,061\,425)=0,307\,125\times0,938\,575)\approx0,2282$ soit environ 228 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x)=0,75x(1-0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,1]$ et sur cet intervalle :
$f'(x)=0,75(1-0,15x)-0,75x\times0,15=0,75-0,1125x-0,1125x=0,75-0,225x$.
Or $0\leqslant x\leqslant1\Rightarrow0\leqslant0,225x\leqslant0,225\Rightarrow-0,225\leqslant-0,225x\leqslant0\Rightarrow$
$0,75-0,225\leqslant0,75-0,225x\leqslant0,75$ ou enfin $0,525\leqslant f'(x)\leqslant0,75$.
Sur $[0\,;\,1]$, $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante de $f(0)=0$ à $f(1)=0,75\times0,85=0,6375$.

3. Sur $[0\,;\,1]$, $f(x)=x\iff0,75x(1-0,15x)=x\iff0,75x(1-0,15x)-x=0\iff$
$x[0,75(1-0,15x)-1]=0\iff x(0,75-0,1125x-1)=0\iff x(-0,25-0,1125x)=0\iff$
$\left\{\begin{array}{lll}x&=&0\text{ ou}\\-0,25-0,1125x&=0&\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lll}x&=&0\text{ ou}\\-0,25&=&0,1125x\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lll}x&=&0\text{ ou}\\-\frac{0,25}{0,1125}&=&x\end{array}\right.$.
Or $-\frac{0,25}{0,1125}<0$ donc dans $[0\,;\,1]$, $S=\{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

4. **a.** *Initialisation* : on a vu que $0\leqslant0,4095\leqslant0,6\leqslant1$, soit $0\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant1$: la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, on ait :
$0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, on a donc : $f(0)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(1)$,
soit puisque $f(0)=0$ et $f(1)=0,75\times(1-0,15)=0,6375\leqslant1$:
$0\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :
Pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant1$.

b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente.

c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell\geqslant0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x)=x$, dont on a vu à la question 3. qu'elle n'avait que 0 comme solution.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell=0$.

5. **a.** L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02
Il s'arrête à $n=11$ car $u_{10}\approx0,019$
L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.