Sujet A

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Démontrer que ces deux suites convergent vers la même limite. *Indication : Montrer qu'elles sont adjacentes.*

Exercice 2

1) Nature de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \ln \frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}$$

2)

Nature puis somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 3

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Corr ex 1

U croissante et v décroissante.

Corr ex 2

1) Le tg est équivalent à 1/n^2.

2)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$