Sujet B

Exercice 1

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ est convergente vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Indication : Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n < 2$ et que cette suite est croissante.

Exercice 2

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

Exercice 3

1. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2k + 3^k}$$

2. Calculer la somme de la série convergente suivante :

$$U = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 - 1}{3^k}$$

Corr ex3

1. $\boldsymbol{\frac{3^k}{2k}} = \frac{\boldsymbol{e^{k\,ln\,3}}}{k\ln 3}.\boldsymbol{\frac{ln\,3}{2}}$ or $k\ln 3 \to +\infty$ et $\frac{\boldsymbol{e^{k\,ln\,3}}}{k\ln 3} \to +\infty$ donc $\frac{3^k}{2k} \to +\infty$ soit $\frac{2k}{3^k} \to 0$ donc $2k = 0(3^k)$, donc $\frac{1}{2k+3^k} \sim \frac{1}{3^k}$ terme général d'une série convergente.

2. On a $k^2 - 1 = k(k-1) + k - 1$

$$U = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = 0$$