Sujet C

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
2) Quel est le sens de variation de (u_n) ?
3) Prouver par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 2

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général suivant (pour $n \geqslant 2$) sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme :

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \qquad\qquad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3

Calculer la somme des séries convergentes suivantes :

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{(k+1)!}$
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-x}x^k}{(k-1)!}$

Sol ex 2

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln(k)}-\frac{1}{\ln(k+1)}\right) \qquad \text{somme téléscopique}\\ &= \frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)}$, donc $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente et } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\ln(2)}.}$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} v_k &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1)-\ln(k)) \qquad \text{somme téléscopique}\\ &= -\ln(n)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$, donc $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ est divergente.}}$