CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Vous indiquerez une seule fois les formules du cours au moment où c'est nécessaire.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $-\frac{1}{3}x^2+2x-3=0$.

2. $(x-1)^2-3=-3$.

3. $x^4-6x^2+8=0$ (*Penser à un changement de variable)*.

4. $\frac{x+20}{10}=\frac{10}{x}$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $2x^2+3x+1 \geqslant 0$
2. $5x^2-x+4 \leqslant 0$
3. $(2x-6)\left(-x^2+2x\sqrt{2}-2\right)>0$
4. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{3}$

Exercice 3

Soit x un réel positif
Soit ABC un triangle tel que : $AB=2x, AC=x+7$ et $BC=2x+1$

1. Déterminer la (ou les) valeur(s) de x pour que le triangle ABC soit rectangle en B
2. Le triangle ABC peut - il être rectangle en A ? Justifier votre réponse

Exercice 4

Soit la parabole P d'équation $y=2x^2+\frac{1}{2}$ et la droite D d'équation $y=2x$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de P.

2. Déterminer le ou les points d'intersection de P et de D.

3. Déterminer la position relative de P et de D.

BONUS !

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{10-x^2} \geq 0{,}5x+2{,}5$.

2. a) Montrer que pour tout $y \geq 0$, $\sqrt{y^2+4}>y$.

b) En déduire que pour tout $y \geq 0$, $x^2-yx-1=0$ possède une unique solution positive.

Barème indicatif /20 : **Ex 1 :** **Ex 2 :** **Ex 3 :** **Ex 4 :** **Bonus :** 3

Corrigé du DS 1

Exercice 1

1. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3) = 4 - 4 = 0.$

Il y a une solution $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)} = 3$. $S = \{3\}$.

2. L'équation est équivalente à $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. $S = \{1\}$.

3. On pose $t = x^2$, l'équation devient $t^2 - 6t + 8 = 0$. $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$.

Il y a donc deux solutions : $t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2} = 2$ ou $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2} = 4$.

Revenons à la variable x : Si $t = 2$, alors $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$; Si $t = 4$, alors $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2}\,;\ -2\,;2\}$.

4. L'équation est équivalente à $x(x+20) = 100 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 100 = 0$. $\Delta = 400 + 400 = \left(20\sqrt{2}\right)^2$.

Il y a deux solutions solution $x_1 = -\frac{20+20\sqrt{2}}{2} = -10 + 10\sqrt{2}$ ou $x_2 = -10 - 10\sqrt{2}$.

$S = \{-10 + 10\sqrt{2}\,;\ -10 - 10\sqrt{2}\}$.

Exercice 2

1. $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Il y a deux racines $x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$ ou $x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$. Comme $a = 1 > 0$, le tableau de signes du trinôme est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2 + 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty\,;\ -1] \cup [-\frac{1}{2}\,;\ +\infty[$

2. $\Delta = 1 - 80 = -79 < 0$.

Il n'y a pas de racine. Comme $a = 5 > 0$, le tableau de signes du trinôme est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$5x^2 - x + 4$		$+$	

Donc $S = \emptyset$.

3. Tout d'abord $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Puis déterminons les racines de $-x^2 + 2x\sqrt{2} - 2$: $\Delta = 8 - 8 = 0$. Il y a 1 racine $x_0 = \frac{-2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2}$.

Soit le tableau de signes du produit P de facteurs :

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x^2 + 2x\sqrt{2} - 2$		$-$	0	$-$		$-$	
P		$+$	0	$+$	0	$-$	

$a = -1 < 0$

Donc $S =]-\infty\,;\ \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\,;3[$.

4. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R} \quad - \{-2; 2\}$ et est équivalente à :

$$\frac{2x+4+2x-4-x^2+4}{2(x^2-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+4}{2(x^2-4)} \geq 0$$

Tout d'abord les racines de $x^2 - 4$ sont -2 et 2.

Puis déterminons les racines de $-x^2 + 4x + 4$: $\Delta = 16 + 16 = 32$.

Il y a deux racines $x_1 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{-2} = 2 + \sqrt{2}$ ou $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Soit le tableau de signes du quotient Q :

x	$-\infty$		-2		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$	
x^2-4		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$		$a = 1 > 0$
$-x^2+4x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$		$a = -1 < 0$
Q		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$		

Donc $S =]-2\,;\, 2-\sqrt{2}] \cup]2\,; 2+\sqrt{2}[$.

Exercice 3

1. Le triangle ABC soit rectangle en B ssi $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Cad $(x+7)^2 = (2x)^2 + (2x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 49 = 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow$
$-7x^2 + 10x + 48 = 0$. $\Delta = 100 + 1344 = 1444 = 38^2$. Il y a deux solutions :
$x_1 = \frac{-10-38}{-14} = \frac{24}{7}$ ou $x_2 = \frac{-10+38}{14} = -2$.
Comme $x_2 < 0$ et que x est une longueur, on conclut que le triangle ABC est rectangle en B pour $x = \frac{24}{7}$.

2. Le triangle ABC soit rectangle en A ssi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Cad $(2x+1)^2 = (2x)^2 + (x+7)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + x^2 + 14x + 49 \Leftrightarrow -x^2 - 10x - 48 = 0$. $\Delta = 100 - 192 = -92 < 0$. Pas de racine. On conclut que le triangle ABC ne peut être rectangle en A.

Exercice 4

1. Les coordonnées du sommet de P sont $S(\alpha\,; f(\alpha))$ où $\alpha = -\frac{b}{2a} = 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$. Donc $S\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

2. et **3.** Soit $D(x) = f(x) - g(x)$. Alors $D(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

On a $\Delta = 4 - 4 = 0$. Il y a une racine $x_0 = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$.

Il y a donc un point d'intersection entre P et D : le point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Comme $a = 2 > 0$, le tableau de signes du trinôme est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$+$	

Comme sur $\mathbb{R}, D(x) \geq 0$ soit $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

On conclut que sur $\mathbb{R}$, P est au-dessus de D.