I Proposition

Une phrase mathématique (pouvant être vraie ou fausse) est une proposition.

Exemples
1) « 2 est un nombre pair » est une proposition vraie.
2) « $x > y$ » est une proposition vraie pour $x = 3$ et $y = 2$ mais fausse pour $x = 1$ et $y = 3$.

II Les quantificateurs universel, existentiel

On utilise souvent, en mathématiques, les expressions, « il existe », « pour tout », « quel que soit », appelés quantificateurs.
Ces quantificateurs peuvent s'écrire à l'aide de symboles qui ne sont pas exigibles pour le lycée mais vous les utiliserez sûrement dans votre parcours scolaire.
Exemples
1) Il existe un nombre réel x solution de l'équation $2x - 1 = 0$. Dit autrement : $\exists\ x \in \mathbb{R}, 2x - 1 = 0$.
2) Pour tout nombre réel x on a : $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$. Dit autrement : $\forall\ x \in \mathbb{R}, (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$.
Remarque
Le sens mathématique de « il existe » est bien « il existe au moins ». Il peut exister une, voire plusieurs solutions comme le montre l'exemple suivant : Il existe un nombre réel x solution de l'équation $x^2 - 9 = 0$.

III Négation d'une proposition

La négation d'une proposition P est la proposition notée $non(P)$ obtenue en affirmant son « contraire ». La négation d'une proposition P est vraie quand P est fausse, fausse quand P est vraie.

Exemples
1) La négation de « 2 est un nombre pair » (vraie) est « 2 n'est pas un nombre pair » (fausse).
2) La négation de « $x \geq 1$ » est « $x < 1$ ».
Remarque
La négation de « pour tout élément, la condition est … » est « il existe (au moins) un élément tel que la condition n'est pas … » ; et inversement. Par exemple, dans une boîte de chocolats contenant des chocolats noirs et blancs, la négation de « tous les chocolats sont noirs » est « il existe (au moins) un chocolat blanc ».

IV L'implication et la réciproque

Une proposition conditionnelle ou implication est une phrase du type : « Si *P* alors *Q* ».
Une implication est soit vraie, soit fausse.
On dit que P est une condition suffisante et Q est une condition nécessaire.

Notation
« Si *P* alors *Q* » peut se noter : $P \Rightarrow Q$ ce qui se lit : P implique Q .
Remarque
Quand on sait que « si P alors Q » est vraie (c'est par exemple une propriété du cours), on est sûr que lorsque la proposition P est vraie, la proposition Q est automatiquement vraie. Attention, lorsque la proposition P est fausse, on ne peut rien dire sur Q ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse.
Exemples
1) « Si $x = 3$ alors $x^2 = 9$ » est une proposition vraie.
2) $x = 5 \Rightarrow 3x = 20$ « 21 est divisible par 7 implique que 21 est un nombre 1er » sont deux implications fausses.
3) Le théorème de Pythagore : « Si le triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

La proposition conditionnelle : « si *P* alors *Q* » a pour réciproque « si *Q* alors *P* ». Elles peuvent être vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre.

Exemples

1) La réciproque du théorème de Pythagore : « Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

2) Soit la proposition : « Si $x = 3$ alors $2x = 6$ » (vraie). Sa réciproque est : « Si $2x = 6$ alors $x = 3$» (vraie).

3) Soit la proposition : « Si x et y sont des entiers pairs alors la somme $x + y$ est paire » (vraie). Sa réciproque est : fausse. En effet, $3 + 7 = 10$ qui est pair alors que 3 et 7 sont impairs. On a exhibé un « contre-exemple » voir paragraphe VII.

V L'équivalence

La proposition « P si et seulement si Q » est la proposition « si P alors Q » et « si Q alors P ». On dit que P et Q sont équivalentes : elles sont vraies en même temps, fausses en même temps.

Notation

« P équivaut à Q » se note $P \Leftrightarrow Q$.

Exemples

1) « ABC est un triangle isocèle en A si et seulement si AB=AC ». **2)** $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

3) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1$. **4)** « L'ensemble des nombres impairs est infini équivaut à dire qu'il n'existe aucun nombre pair » est une équivalence fausse.

VI La contraposée

La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est : $non(Q) \Rightarrow non(P)$.

Exemple

La contraposée de « Si le triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » est « Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors le triangle n'est pas rectangle en A ».

Remarque

Une propriété et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Donc pour démontrer qu'une implication est vraie ou fausse, il suffit que sa contraposée le soit.

VII La démonstration par le contre-exemple

Pour démontrer que l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est fausse, on montre que P peut être vérifiée alors que Q n'est pas vérifiée. Pour cela, on trouve un contre-exemple.

Exemples

1) Pour démontrer que la proposition « pour tout nombre x, on a $x^2 - 2 \geq 0$ » est fausse, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire trouver un nombre x tel $x^2 - 2 < 0$. Le contre-exemple $x = 1$ convient.

2) Démontrons que la proposition « pour tout nombre x, $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ » est fausse. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x + 1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$ »

VIII Raisonnement par l'absurde

On commence par supposer le contraire de la conclusion de la proposition. En effectuant un raisonnement ou un calcul, on aboutit à une absurdité. Cela signifie qu'il y a un problème et que notre supposition de départ est fausse.

Exemple

Montrons qu'il n'existe pas de triangle ABC tel que AB=5, BC=3 et AC=10 ». Supposons « par l'absurde » qu'un tel triangle existe. D'après l'inégalité triangulaire, $AC \leq AB + BC$. On a donc $AC \leq 5 + 3$ soit $AC \leq 8$. On aboutit à une contradiction puisque $AC = 10 > 8$. On en déduit qu'il n'existe pas un tel triangle.