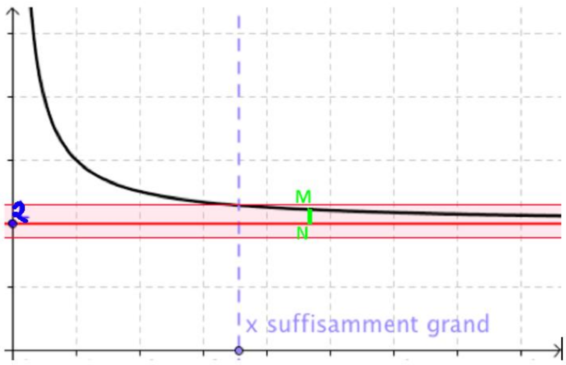
I Limite d'une fonction en l'infini

1.1 Limite finie

Définition On dit que $f(x)$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Remarque
On définit de le même façon $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Exemple
La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition *Interprétation graphique*
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f. On définit de même l'asymptote horizontale en $-\infty$.

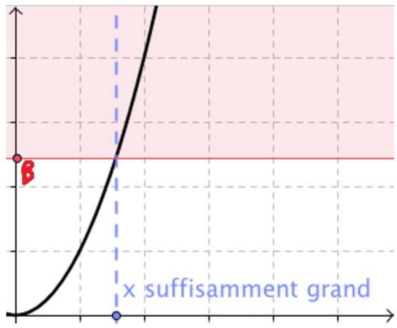
Exemple
Dans l'exemple précédent, la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f.

1.2 Limite infinie

Définitions (i) On dit que $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
(ii) On dit que $f(x)$ admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $]-\infty\,;B[$ (avec B nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

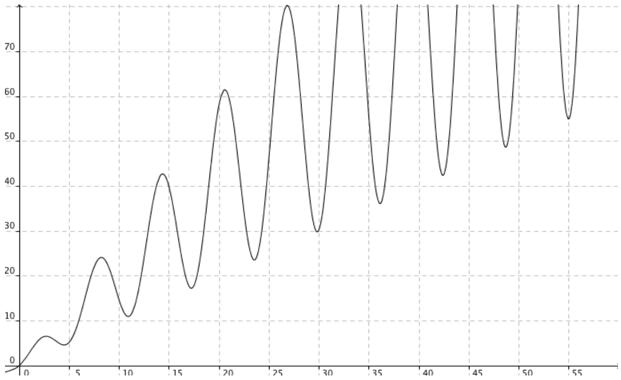
Remarque
On définit de le même façon $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Exemple
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand. Si on prend un réel B quelconque, l'intervalle $]B\,;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

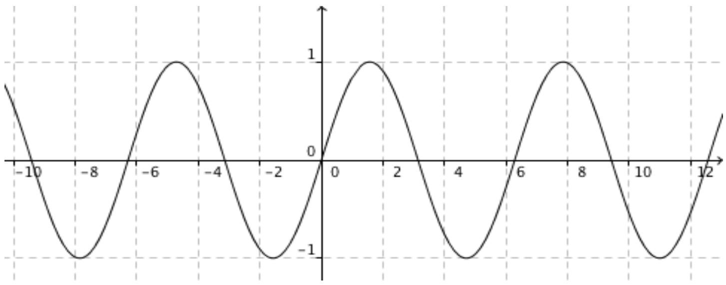


Remarques

1) Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



2) Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



II Limite d'une fonction en une valeur réelle

2.1 Limite finie

Définition On dit que $f(x)$ admet pour limite l (l réel) lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Propriété Si f est une fonction de référence (fonction carré, inverse, polynôme, fonction rationnelle (quotient de polynômes), racine carrée, fonction exponentielle, fonctions trigonométriques…) alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ où a est un réel de l'ensemble de définition de f.

Remarque

On verra plus loin que cela traduit la notion de continuité d'une fonction en a.

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to -3} x^2 = (-3)^2 = 9.$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2.$

2.2 <u>Limite infinie</u>

Définition On dit que $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

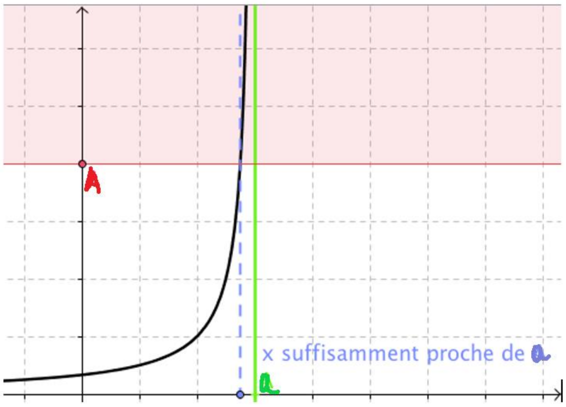
Remarque

On définit de le même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a.

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de a. Si on prend un réel A quelconque, l'intervalle $]A\,;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de a.



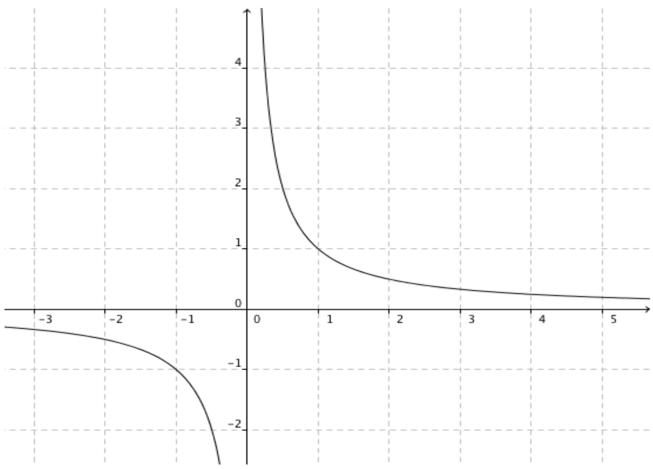
Définition *Interprétation graphique*

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale en a à la courbe représentative de la fonction f. On définit de même l'asymptote verticale lorsque la limite est $-\infty$.

Remarque

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel a selon que $x > a$ ou que $x < a$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.



- Si $x < 0$:

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$f(x) = \frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000

Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

- Si $x > 0$:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x) = \frac{1}{x}$	10	100	1000	10000

Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

On parle de **limite à gauche** de 0 et de **limite à droite** de 0.
Ici, l'axe des ordonnés est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse.

De manière générale, les limites sont indiquées dans un tableau de variations. Par exemple, pour la fonction inverse on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Exercice 1
On a représenté les variations d'une fonction f dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	3

1. Déterminer toutes les limites de la fonction f.
2. Existe-t-il des tangentes horizontales ?
3. Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation.
4. Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

III Limites des fonctions de référence

Tableau à connaître par ❤

Fonction inverse	Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; en multipliant par une cste k, on obtient les mêmes résultats $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ n pair : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$; n impair : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$
Fonction puissance	Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; n pair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$; n impair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
Fonction exponentielle	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

IV Opérations sur les limites

a peut désigner un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. « FI » désigne Forme Indéterminée. Comme pour les suites, lorsque est indiqué $\pm\infty$, on peut déterminer le signe à l'aide de la règle des signes.

4.1 Limite de la somme : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Exemple

Soit $h(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x) + g(x)$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. .On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

4.2 Limite du produit : $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l, l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	ll'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

La limite de $k \times g$ où k est une constante non nulle est la limite de fg dans le cas où f=k.

Exemple

Soit $h(x) = (1+x^2)\left(2+\frac{1}{x}\right) = f(x) \times g(x)$ où $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

4.3 Limite du quotient : $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	FI	FI

Remarque
La limite de $\frac{k}{g}$ où k est une constante non nulle est la limite de $\frac{f}{g}$ dans le cas où f=k.

Exemples
1) Soit $h(x) = \frac{\frac{1}{x}-1}{e^x} = \frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ et $g(x) = e^x$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0^-$.
2) Important
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{1-x}{2-x}$. Etudions la limite de f en 2.

- Limite par valeurs supérieures (à droite)
Aide : si x tend vers 2 par valeurs supérieurs (à droite), on peut évaluer le signe d'une expression en remplaçant x par $2,001$ par exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} (1-x) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (2-x)) = 0^- \end{array}\right. \quad \underset{\text{Par quotient}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty}$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ présente une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

- Limite par valeurs inférieures (à gauche)
Aide : si x tend vers 2 par valeurs inférieures (à gauche), on peut évaluer le signe d'une expression en remplaçant x par $1,999$ par exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} (1-x) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} (2-x)) = 0^+ \end{array}\right. \quad \underset{\text{Par quotient}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty}$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ présente une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3) Soit $i(x) = \frac{-x-1}{x^2+2x}$. Déterminons $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$. D'une part, on a $\lim\limits_{x\to-2} -x-1 = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to-2} x^2 + 2x = 0$.
En faisant un tableau de signes, pour $x > -2, x^2 + 2x < 0$ et inversement. Donc : $\lim\limits_{x\to-2^+} i(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^-} i(x) = +\infty$.

Remarques - bilan
1) Comme pour les suites, on rappelle que les quatre *FI* sont, par abus d'écriture : "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".
Pour lever l'indétermination, on procède donc comme cela a été fait dans le chapitre sur les suites (cf exemples). Faire l'**exercice 2** pour vous entraîner à ce sujet.
2) Méthode : pour lever l'indétermination

Pour étudier la limite d'une fonction on utilise les opérations élémentaires sur les limites. Si l'on est confronté à une des 4 formes indéterminées on transforme l'expression. On peut essayer les méthodes suivantes :

1. Limite quand x tend vers l'infini (c'est comme pour les suites).

1. a. Factoriser les expressions par le terme qui tend le plus vite vers l'infini, le terme dominant avec dans cet ordre :
$$\sqrt{x} \twoheadrightarrow x \twoheadrightarrow x^2 \twoheadrightarrow x^3 \cdots$$

1. b. Penser à l'expression conjuguée si des racines carrées apparaissent.

1. c. On peut aussi majorer l'expression, en valeur absolue ou trouver un encadrement par des fonctions dont on connait les limites et appliquer les théorèmes de comparaison et d'encadrement qui suivent.

2. Limite quand x tend vers a.

2. a. Dans le cas d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers a pour une fraction rationnelle, il faut essayer de factoriser numérateur et dénominateur par $(x - a)$.

2. b. Dans le cas d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers a, on peut aussi penser au taux d'accroissement et à la définition du nombre dérivé.

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{2x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{3}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{-1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2}$?

On a : $\frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} = \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x+3}{x-1}$.

Soit : $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty$.

4.4 Limite d'une fonction composée

Notion de fonction composée sur un exemple

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-1]$ par :

$$f \;:\; x \longmapsto f(x) = \sqrt{1-x}$$

On ne peut pas écrire f comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles et appliquer les théorèmes précédents. On va décomposer cette fonction en deux fonctions usuelles par **composition**.
La fonction f peut être décrite, comme dans un programme de calcul vu au collège par :

Prendre un réel de $]-\infty\,;\,-1]$	x	
Multiplier x par (-1) et ajouter 1	$1-x$	$1-x=Y$
Prendre la racine carrée	$\sqrt{1-x}$	$\sqrt{Y}$

On va résumer ce programme par un schéma de composition :

$$x \overset{u}{\longmapsto} 1-x \qquad Y \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{Y}$$

La fonction v est la fonction racinée carrées $Y \longmapsto \sqrt{Y}$ et la fonction u est la fonction affine $x \longmapsto 1-x$.

On notera alors pour tout réel x de $]-\infty\,;\,-1]$:

$$f(x) = \sqrt{1-x} = v(1-x) = v\Big(u(x)\Big) = v\ o\ u(x)$$

Remarque
En général, on n'a pas $v \circ u = u \circ v$ (on dit que la composée de fonctions n'est pas commutative).
En effet, prendre $u(x) = x+1$ et $v(x) = x^2$; alors on a : $(v \circ u)(x) = x^2+1$ et $(u \circ v)(x) = (x+1)^2$.

Propriété *Limite d'une fonction composée*
a, b et c peuvent désigner des nombres réels, $+\infty$ ou $-\infty$.
Si on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} u(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} v(X) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} v \circ u(x) = c$.

Démonstration admise

Exemple
$\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x^2+4} = \lim\limits_{x\to0} v(u(x))$ où $v(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = x^2+4$. On a : $\lim\limits_{x\to0} x^2+4 = 4$. Posons $X = x^2+4$
On a $\lim\limits_{X\to4} \sqrt{X} = 2$. Donc : $\lim\limits_{x\to0} v(u(x)) = 2$.

Exercice 2

Déterminer :

1. $\lim_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$;

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$;

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$;

4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ *Indication : passer par la forme conjuguée* ;

5. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ *Indication : passer par la forme conjuguée.*

V Limites et comparaison

a peut désigner un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

5.1 Théorèmes de comparaison

Théorème *de minoration*

Si pour x assez voisin de a, $f(x)\geq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Démonstration admise

Exemple

Soit $f(x)=e^{2x}(2+\sin x)$. Alors, on a pour tout x réel $-1\leq \sin x\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq 2+\sin x\leq 3$, soit en particulier : $e^{2x}\leq f(x)$. Or, comme $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ on en déduit par le théorème de minoration que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Théorème *de majoration*

Si pour x assez voisin de a, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Démonstration admise

Exemple

Soit $f(x)=x(\cos x-2)$. On a pour tout x réel, $-1\leq\cos x\leq 1 \Leftrightarrow -3\leq \cos x-2\leq -1$, soit en particulier : $f(x)\leq -x$. Or, $\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$; d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

5.2 Théorème d'encadrement

Théorème *des gendarmes*

Soit l un réel.

Si pour x assez voisin de a, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ avec $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

Démonstration admise

Exemple

Soit $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. On a pour tout x réel, $-x\leq f(x)\leq x$ (car $-1\leq \sin x\leq 1$). On a $\lim_{x\to 0} -x=\lim_{x\to 0} x=0$

D'où par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exercice 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x+1)^2$ puis que $x \leq \sqrt{x^2+x+1} \leq x+1$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

VI Fonction exponentielle et limite

6.1 Limites de la fonction exponentielle

Lemme Pour tout x réel, $e^x \geq x$.

Démonstration

Soit la fonction $f(x) = e^x - x$. Il s'agit donc de démontrer que pour tout x réel, $f(x) \geq 0$.
On a $f'(x) = e^x - 1$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ et inversement. Donc f admet un minimum en 0 (puisque décroissante puis croissante) et il vaut $f(0) = 1$. Soit $f(x) \geq 0$ pour tout réel x.

Propriétés (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstrations ***exemplaires***

(i) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et par le lemme ci-dessus, on conclut avec le théorème de minoration $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$, en posant $X = -x$. Or, $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$, comme limite d'un quotient. Soit : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Propriété $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration en exercice

6.2 Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$

Propriétés (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. (ii) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$. (iv) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration de ***(ii) exemplaire***

D'après le lemme ci-dessus, on a $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1}$. Or la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc pour tout $x \geq 0, \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ soit $e^x \geq kx^{n+1}$ avec $k > 0$. On en déduit pout tout $x > 0, \frac{e^x}{x^n} \geq kx$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ donc par le théorème de minoration $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

VII Compléments

Ci-dessous, la définition d'une asymptote oblique en $\pm\infty$

Définition On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ à la courbe C représentative d'une fonction f si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Intuitivement, cela traduit le fait que la courbe C se rapproche infiniment près de la droite d'équation $y = ax + b$.

Ci-dessous des définitions des limites formelles plus rigoureuses (hors-programme).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \quad (l \in \mathbb{R})$	$\forall \epsilon>0, \exists \lambda>0, x\in D_f \cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall \epsilon>0, \exists \lambda>0, (x\in D_f \text{ et } x>\lambda) \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, x\in D_f \cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, (x\in D_f \text{ et } x>\lambda) \Rightarrow f(x)<A$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, x\in D_f \cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, (x\in D_f \text{ et } x>\lambda) \Rightarrow f(x)>A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \quad (l \in \mathbb{R})$	$\forall \epsilon>0, \exists \lambda<0, x\in D_f \cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall \epsilon>0, \exists \lambda<0, (x\in D_f \text{ et } x<\lambda) \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda<0, x\in D_f \cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda<0, (x\in D_f \text{ et } x<\lambda) \Rightarrow f(x)<A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda<0, x\in D_f \cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda<0, (x\in D_f \text{ et } x<\lambda) \Rightarrow f(x)>A$

Solution des exercices

Exercice 2

1) On reconnaît une forme indéterminée "$\infty - \infty$". Levons l'indétermination (méthode de la factorisation par le terme de plus haut degré) :

$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$.

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$.

Donc, par limite d'une somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -\,3$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, donc, par limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\,\infty$.

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty$.

2) On reconnaît une forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$". Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

• Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$.

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} 6 - \frac{5}{x^2} = 6$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \dfrac{1}{3}$.

3) On reconnaît une forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$". Levons l'indétermination :

• Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

• Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \to -\infty} 3 + \frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \to -\infty} x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{4x - 1} = -\infty$.

4) On reconnaît une forme indéterminée "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

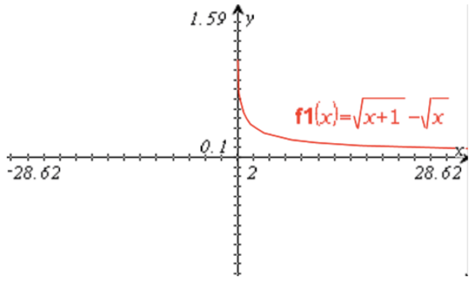
$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

• Par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=+\infty$.

Et donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

Soit $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$.

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.



5) On reconnaît une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\\ &= \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\\ &= \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\end{aligned}$$

• Or $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-1}+2=\sqrt{5-1}+2=4$

Donc, par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$.

Soit : $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{1}{4}$.

Exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} & x & \leqslant & \sqrt{x^2+x+1} & \leqslant x+1 \\ \iff & x^2 & \leqslant & x^2+x+1 & \leqslant (x+1)^2 \quad \text{car } X \mapsto X^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff & 0 & \leqslant & x+1 & \leqslant 2x+1 \quad \text{en soustrayant } x^2 \text{ membre à membre} \end{array}$$

Comme $0 \leqslant x$, on a bien $0 \leqslant x+1$ et $x+1 \leqslant x+(x+1) = 2x+1$. Pour $x \geqslant 0$, le dernier encadrement est vrai donc le premier aussi puisqu'il lui est équivalent.

2. Continuons, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{car } X \mapsto \frac{1}{X} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x+1} \leqslant \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+x+1} \leqslant \frac{x+\sqrt{x}}{x} \quad \text{en multipliant par } x+\sqrt{x} > 0$$

$\dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. D'autre part,

$1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ car $x > 0$. D'où :

$$1 - \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{x+\sqrt{x}}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$, on conclut d'après le **théorème d'encadrement** que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe de f. ▲