Sujet A

Exercice 1

Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $f(x) = xe^{x+1}$

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles $F = \{(x, y, z) \mid x+y-z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur intersection.

Exercice 3

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x \ln x$ et $e_4(x) = x^2 \ln x$. On note E l'espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $ax + bx^2 + cx \ln x + dx^2 \ln x = 0$. Montrer que $a + b = 0$.
2. Etablir que $\forall x > 1$, $\dfrac{a}{x \ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.
3. Etablir ensuite que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln x}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.
4. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.
5. En déduire que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre, puis que c'est une base de E.

DL IMPORTANTS

1) $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

2) $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

3) Pour tout réel α, $(1+u)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)$

Corr ex 2

On peut écrire F sous la forme $F = \{(x, y, x+y) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $F = Vect((1,0,1);(0,1,1))$ (F est bien constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs). C'est donc bien un sous-ev de $\mathbb{R}^3$. De même, $G = Vect((1,1,1);(-1,1,-3))$ est un ev. L'intersection des deux ensembles est constitué des éléments de G vérifiant l'équation définissant F, donc $F \cap G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a-b+a+b-a+3b = 0\} = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a = -3b\} = \{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\} = Vect((-4,-2,-6))$.

Corr ex 3

1. Il suffit de constater qu'on peut remplacer x par n'importe quelle valeur positive, en particulier 1 : on a alors $a + b = 0$.
2. En effet, si $x > 1$, on peut diviser l'égalité de départ par $x^2 \ln x$, qui ne s'annule pas, et on obtient $\frac{a}{x \ln x} + \frac{b}{\ln x} + \frac{c}{x} + d = 0$. Regardons maintenant la limite du membre de gauche quand x tend vers $+\infty$, elle vaut d. Mais comme ce membre de gauche est constant égal à 0 par hypothèse, on doit avoir $d = 0$.
3. C'est exactement la même chose en divisant cette fois par x^2 (et en utilisant que $d = 0$). La limite vaut cette fois-ci b (on a une croissance comparée pour le dernier terme), donc $b = 0$.
4. Comme $a + b = 0$ et $b = 0$, on a donc $a = 0$. Seul c peut encore être non nul, c'est-à-dire qu'on a $cx \ln x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui ne se produit que si $c = 0$ (sinon, la fonction ne s'annule que pour $x = 1$).
5. On vient de montrer que toute combinaison linéaire nulle de la famille avait des coefficients nuls, ce qui prouve que la famille est libre. Comme elle est de plus génératrice (par hypothèse !), c'est une base de E, sui est donc de dimension 4.