Sujet B

Exercice1

Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(t) = \ln(1-3t)$

Exercice 2

Calculer, à l'aide des équivalents, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

Exercice 3

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a-b \\ 3b & 2a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
2. $F = \{(x+y, x-y, 2y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y-3z = 0\}$
4. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0 \text{ et } 2x-y+z = 0\}$

Corr ex 2

1. $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x \Rightarrow (e^x-1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \Rightarrow x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Donc $\dfrac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2}=1$.

   On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)}=1.}$

2. On sait que $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$ on peut écrire $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Donc $x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\times\dfrac{1}{x}=x$

   On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.}$

3. $(1+x)^{1/x}=e^{1/x\times\ln(1+x)}$. Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $1/x\times\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} 1/x\times x=1$.

   Donc $\lim\limits_{x\to 0} 1/x\times\ln(1+x)=1$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e^1=e}$

4. $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x/(x-1)}=e^{\frac{x}{x-1}\ln((x+1)/2)}$. Effectuons le changement de variable $t=x-1$ (lorsque $x\to 1$, $t\to 0$). On a alors $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x/(x-1)}=e^{\frac{t+1}{t}\ln(1+t/2)}$.

   Or $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et comme $t/2\to 0$ on peut écrire $\ln(1+t/2) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2}$. On en déduit que $\dfrac{t+1}{t}\ln(1+t/2) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t+1}{2}$ et donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+1}{t}\ln(1+t/2)=\dfrac{1}{2}$.

   Par conséquent $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x/(x-1)}=e^{1/2}=\sqrt{e}.}$

Corr ex 3

1.
$$\begin{aligned}E&=\left\{\begin{pmatrix}a+2b & a-b\\ 3b & 2a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}a & a\\ 0 & 2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b & -b\\ 3b & 0\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\&=\left\{a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\&=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

   E est donc le sous-espace engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right)$.

   $\boxed{E \text{ est donc un espace vectoriel.}}$

2.
$$\begin{aligned}F&=\{(x+y,x-y,2y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(x,x,0)+(y,-y,2y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{x(1,1,0)+y(1,-1,2)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\operatorname{vect}((1,1,0),(1,-1,2))\end{aligned}$$

   F est donc le sous-espace engendré par la famille $((1,1,0),(1,-1,2))$.

   $\boxed{F \text{ est donc un espace vectoriel.}}$

3. Calcul préliminaire :

   $x+2y-3z=0 \Leftrightarrow x=-2y+3z$.

   On a donc :
$$\begin{aligned}G&=\{(3z-2y,y,z)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(-2y,y,0)+(3z,0,z)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{y(-2,1,0)+z(3,0,1)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\operatorname{vect}((-2,1,0),(3,0,1))\end{aligned}$$

   G est donc le sous-espace engendré par la famille $((-2,1,0),(3,0,1))$.

   $\boxed{G \text{ est donc un espace vectoriel.}}$

4. Calcul préliminaire :

$$\begin{cases}x+y+z=0\\2x-y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+y-2x=0\\z=y-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\z=-3y\end{cases}$$

Grâce à ce calcul on a :

$H=\{(2y,y,-3y)/y\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,-3)/y\in\mathbb{R}\}=\operatorname{vect}((2,1,-3))$

H est donc le sous-espace engendré par la famille $((2,1,-3))$.

$\boxed{H \text{ est donc un espace vectoriel.}}$