Sujet A

Question de cours

Somme des entiers des 1 à n avec démo.

Exercices

Exercice 1

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k-1)^2$$

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, les équations suivantes :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\cos^2 x + \left(\sqrt{3}+2\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$$

Exercice 3

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Correction ex 3

Par récurrence sur $n \geq 2$.
Pour $n = 2$ ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.

$$1 + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{HR}{\geq} \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{?}{\geq} \frac{3(n+1)}{2n+3}$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2n+3} = \frac{n^2+2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geq 0$$

Récurrence établie.