Sujet B

Question de cours

Simplifier $S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercices

Exercice 1

Démontrer par récurrence que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 2

Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x+22} \geqslant 1 - x$.

Exercice 3

Pour n entier strictement positif,

on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

a) Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

b) En déduire la valeur de S_n.

Sol ex 1

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$.

Hérédité : Soit n un entier naturel.

Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} + \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}+1}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1} + \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}+1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - 2^{n+1}\left(\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}+1}\right).$$

L'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ donne :

$$\left(x^{2^{n+1}}-1\right)\left(x^{2^{n+1}}+1\right) = \left(x^{2^{n+1}}\right)^2 - 1 = x^{2^{n+1}\times 2} - 1.$$

$\left(x^{2^{n+1}}-1\right)\left(x^{2^{n+1}}+1\right) = x^{2^{n+2}} - 1$ donc

$$\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}+1} = \frac{x^{2^{n+1}}+1-\left(x^{2^{n+2}}-1\right)}{x^{2^{n+2}}-1} = \frac{2}{x^{2^{n+2}}-1}.$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+2}}{x^{2^{n+2}}-1}$.

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}.$$