Sujet D

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=n+1}^{2n} 3^{-k}$$

$$W = \sum_{k=0}^{n} 3^{2k+2} + 2^{3k+1}$$

$$U = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{3}\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ en utilisant $\tan x$.

Exercice 3

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Corr ex 3

1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathscr{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

   - La proposition $\mathscr{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
   - Soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

   Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.
   - Nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$$

   et comme $\mathscr{H}_0$ est vraie alors $\mathscr{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 - 3x_n}{x_n + 2}$$

   Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.
3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathscr{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

   - La proposition $\mathscr{H}_0$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$, supposons que $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vérifiée.
   D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   - Nous concluons en résumant la situation :
   $\mathscr{H}_0$ est vraie, et $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathscr{H}_n$ est toujours vraie.
4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.