GEOMETRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE	Term

I Vecteurs de l'espace

1.1 Définition

Définition Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …

Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Remarque
Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, …

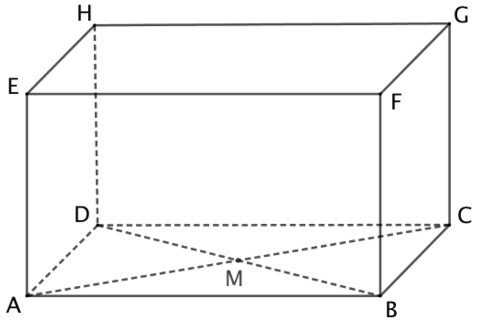
1.2 Opérations sur les vecteurs, combinaisons linéaires

Propriétés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent des vecteurs de l'espace, λ et μ sont deux réels.
(i) $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.
(ii) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.
(iii) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
(iv) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

Démonstrations admises

Définition *Combinaisons linéaires de vecteurs*
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$, avec a, b et c réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exemple
Soit le parallélépipède ci-dessous M est le centre du rectangle ABCD. Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$ $\qquad$ $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

1.3 Vecteurs colinéaires, vecteurs directeurs d'une droite

Définition Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriétés (i) Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
(ii) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Définition Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de la droite d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

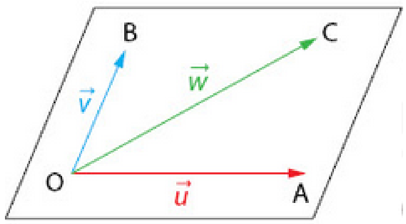
Remarques
1) Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, alors tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur.
2) Une droite d peut être définie par un point A et un vecteur directeur : on la note $d(A, \vec{u})$.

Exercice 1
Soit M, N et P trois points de l'espace non alignés.
On considère les points I et J tels que : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$.
Montrer que P appartient à la droite (IJ).

II Plans de l'espace

2.1 Vecteurs coplanaires

Définition Dire que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C où $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ appartiennent à un même plan.

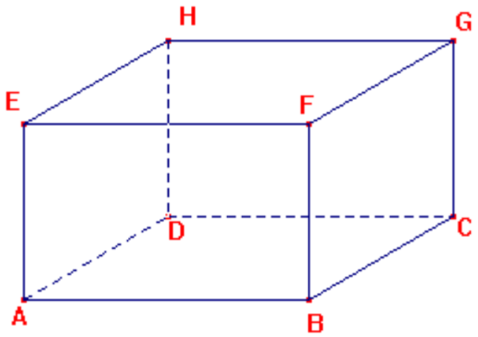


Remarque
On dit que des points sont coplanaires s'il existe un plan qui contient ces points.

Propriété Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des réels a et b tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Démonstration admise

Exemple
On considère un pavé droit ABCDEFGH, J et K sont les milieux respectifs des segments [DB] et [AH].



Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont coplanaires.
On va exprimer le vecteur $\overrightarrow{JG}$ en fonction des vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HF}$.
$\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AH}$. Les trois vecteurs sont bien coplanaires.

2.2 Vecteurs linéairement indépendants

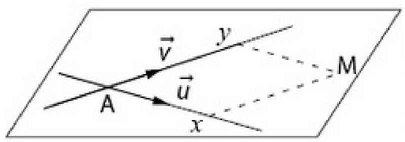
Définition Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace.
On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si l'un des vecteurs n'est pas combinaison des deux autres.

Propriété Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants ssi l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$ implique $a = b = c = 0$.

Remarque
Trois vecteurs sont **linéairement indépendants** ssi ils ne sont pas **coplanaires.**

2.2 Caractérisation d'un plan de l'espace

Un plan P de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites sécantes, c'est-à-dire d'un point A et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

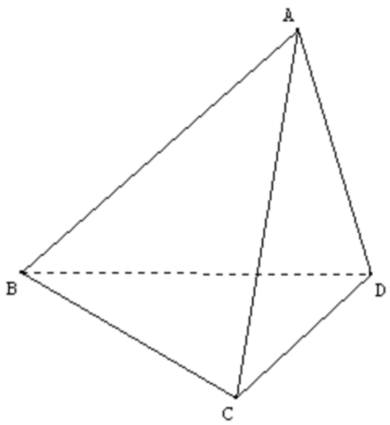


On dit alors que $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan P. On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan appelé base et qu'il définit sa direction. On pourra noter le plan P, $P(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

Propriété Soit A, B et C trois points non alignés dans l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires c'est-à-dire qu'il existe des réels a et b tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Démonstration admise

Exemple
Soit ABCD un tétraèdre. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$. Montrons que le point M appartient au plan (ABC).



L’objectif est d’écrire $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Remarque
Un plan peut être défini soit :
- Par trois points non alignés ;
- Par une droite et un point n’appartenant pas à cette droite ;
- Par deux droites sécantes ;
- Par deux droites strictement parallèles.

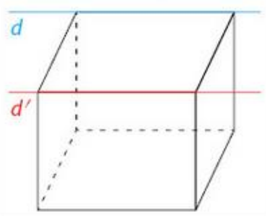
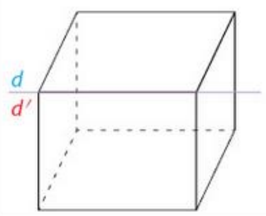
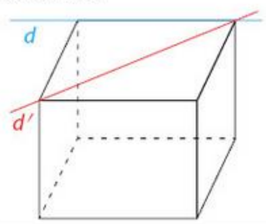
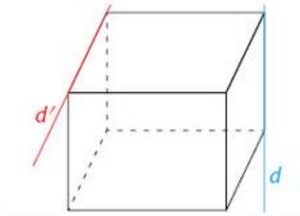
2.4 Positions relatives de droites et plans de l’espace

Définition Deux droites de l’espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.

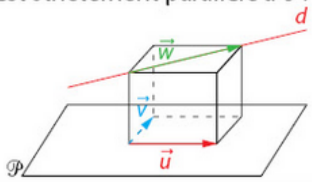
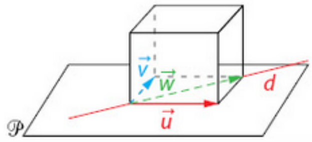
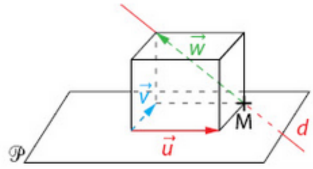
Exemple
Deux droites parallèles sont coplanaires.

Propriétés Soit d et d’ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\ et\ \overrightarrow{u'}$.
(i) Si il existe $k \in \mathbb{R}, \vec{u} = k\overrightarrow{u'}$ alors d et d’ sont parallèles.
(ii) Si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ non colinéaires, alors d et d’ sont sécantes lorsqu’elles ont un point en commun, non coplanaires sinon.

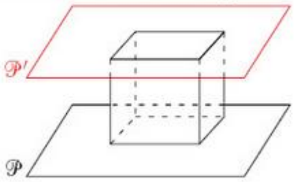
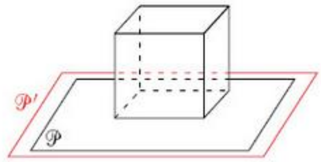
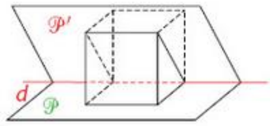
Démonstration admise

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.		$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires.	
d et d' sont coplanaires et strictement parallèles.	d et d' sont coplanaires et confondues.	d et d' sont coplanaires et sécantes.	d et d' sont non coplanaires aucun plan ne contient d et d'
			

Soit $\mathcal{P}$ le plan de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.		$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.	d est contenue dans $\mathcal{P}$.	d et $\mathcal{P}$ sont sécants en M.
		

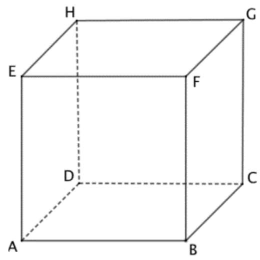
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même direction : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.		$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont pas la même direction.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite d.
		

Deux plans sont parallèles si, et seulement si, deux vecteurs de l'un peuvent être deux vecteurs directeurs de l'autre. Ils sont confondus lorsqu'ils ont un point en commun.

Exercice 2

Soit ABCDEFGFH un cube. M et L sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.
Démontrer que la droite (ML) est parallèle au plan (DBH).



III Bases, repères et coordonnées de l'espace

3.1 Bases de l'espace

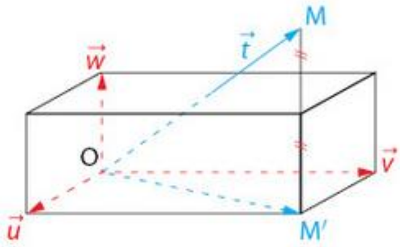
Définition Une base de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formé de vecteurs non coplanaires c'est-à-dire non linéairement indépendants.

Propriété - Définition
Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de l'espace.
Pout tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
$(a\,;b\,;c)$ est le triplet des coordonnées du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Démonstration en exercice

Exemples

1)

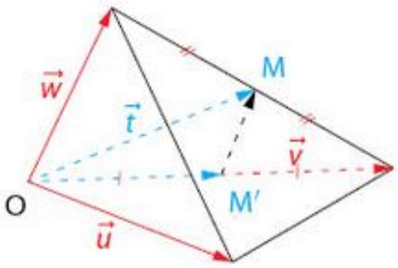


$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$

$\vec{t}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

2)



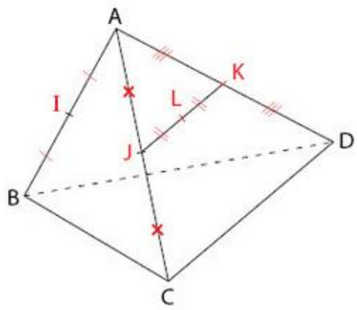
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

$\vec{t}\begin{pmatrix}0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 3

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC] et [AD]. L est le milieu du segment [JK].



1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

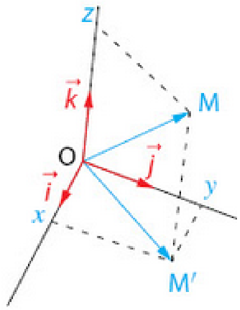
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

3.2 Repères de l'espace

Définition Un repère de l'espace noté $(O\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est formé d'un point O (l'origine) et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de vecteurs de l'espace.

Propriété - Définition
Soit $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Pout tout point M, il existe un unique triplet $(x\ ; y\ ; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
$(x\ ; y\ ; z)$ est le triplet des coordonnées du point M dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
x est l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa cote.

Démonstration en exercice



Remarque

On note $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou aussi $\overrightarrow{OM}\ (x\ ; y\ ; z)$.

Propriétés Soit le repère $(\mathrm{O}; \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$ de l'espace. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du repère. Soit α un réel.

(i) $\vec{u} + \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$;

(ii) $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$.

3.3 Calculs sur les coordonnées

Propriétés Soit le repère $(\mathrm{O}; \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$ de l'espace. $\mathrm{A}(x_A\ ; y_A\ ; z_A)$ et $\mathrm{B}(x_B\ ; y_B\ ; z_B)$ sont deux points du repère.

(i) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

(ii) Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I(\frac{x_A + x_B}{2}\ ; \frac{y_A + y_B}{2}\ ; \frac{z_A + z_B}{2})$.

Exemples
Soit $A\left(-1\ ; -2\ ; \frac{1}{2}\right)$ et $B(\frac{1}{3}\ ; 2\ ;\ -1)$.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

2) Soit I le milieu de [AB], alors $I\left(-\frac{1}{3}\ ; 0\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$.

3.4 Représentations paramétriques d'une droite

Propriété Dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, soit une droite *d* passant par un point $A(x_A\,;y_A\,;z_B)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On a : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x = x_A + at\\ y = y_A + bt\\ z = z_A + ct\end{cases}$.

Remarque
Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite d.

Démonstration

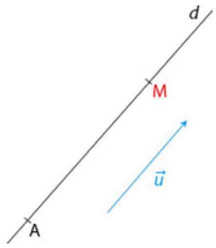
$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_A\\ z - z_A\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x - x_A = at\\ y - y_A = bt\\ z - z_A = ct\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = x_A + at\\ y = y_A + bt\\ z = z_A + ct\end{cases}$



Exemple

d est la droite qui passe par le point A(2 ; − 3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;4\,;2)$.

Une représentation paramétrique de *d* est $\begin{cases}x = 2 + 3t\\ y = -3 + 4t\\ z = 1 + 2t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

coordonnées de A   coordonnées de $\vec{u}$

Le point $B(5\,;1\,;3)$ appartient à d. En effet, dire que B appartient à d équivaut à dire qu'il existe un réel t tel que :

$\begin{cases}5 = 2 + 3t\\ 1 = -3 + 4t\\ 3 = 1 + 2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 1\\ t = 1\\ t = 1\end{cases}$. *Lorsque les trois équations ont pour solutions au moins deux valeurs différentes de t, alors le point n'appartient à la droite.*

Remarques

1) Une droite d admet **une infinité de représentations paramétriques**. En effet, on peut choisir un point de d autre que A ou choisir un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ (autre que $\vec{0}$).

Dans l'exemple précédent, pour $t = -1$, on obtient le point $D(-1\,;\,-7\,;\,-1)$ et si on prend le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$ il est colinéaire à $\vec{u}$. Donc une autre représentation paramétrique de d est : $\begin{cases}x = -1 + 6t\\ y = -7 + 8t\\ z = -1 + 4t\end{cases}$.

2) On peut résumer en disant que chaque valeur du paramètre t donne un point de la droite et inversement, chaque point de la droite admet un paramètre t.

Solution de l'exercice 2

On exprime le vecteur $\overrightarrow{ML}$ en fonction des vecteurs directeurs du plan (DBH), par exemple $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$:
$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$. Or, on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
Soit $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$.
$\overrightarrow{ML}, \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.