Sujet C

<u>Exercice 1</u>

Soit A, B, C, D et E les points d'affixes respectives : 2 ; $-1+i$; $-i$; $i\sqrt{3}$ $et - 4 + 3i\sqrt{3}$.

1. Démontrer que les points A, D et E sont alignés.
2. Déterminer la nature du triangle ABC (étudier le rapport $\frac{z_c - z_b}{z_x - z_a}$).

<u>Exercice 2</u>

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

<u>Exercice 3</u>

$Déterminer\ les\ solutions\ de\ z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$

<u>Exercice 4</u>

Ecrire sans symbole somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$$

pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Corr ex 3

Exercice 2.20 *On pose* $Z = z^2$, *l'équation devient* $Z^2 - (3+8i)Z - 16 + 12i = 0$. *Le discriminant est* $\Delta = (3+8i)^2 - 4(-16+12i) = 9$. *Les racines sont alors* $Z_1 = \frac{3+8i-3}{2} = 4i$ *et* $Z_2 = \frac{3+8i+3}{2} = 3+4i$.
On résout $z^2 = Z_1 = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$. *Les solutions sont* $z_1 = \sqrt{4}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ *et* $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

On résout $z^2 = Z_2 = 3+4i$. *On cherche les solutions sous la forme* $z = a + ib$, *avec* a *et* b *réels. On obtient alors le système* $\begin{cases} a^2 - b^2 & = 3 \\ 2ab & = 4 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \end{cases}$. *Ce qui donne* $z_3 = 2 + i$ *et* $z_4 = -2 - i$.
En définitive, les solutions sont $\left\{\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, 2+i, -2-i\right\}$