DS n°1 (17/10/22)

(1)

Exercice 1 /2

1. $-1+i$ est bien racine. 0,5

2. D'après 1., $z^2+(1-4i)z-3-3i$ 0,5

$= (z-(-1+i))(z-a)$ où a est l'autre racine.

$= z^2+(1-a-i)z-a+ia$

$\iff \begin{cases} 1-a-i = 1-4i \\ -a+ia = -3-3i \end{cases}$

De la 1re ligne, on a: $-a-i=-4i$

$\iff a=4i-i$

$\iff \underline{a=3i}$

Exercice 2 /4

1. $z_1=2$ 0,5

$z_2=2+2i$

2. $z=a+ib \Rightarrow z\bar z=a^2+b^2\in\mathbb{R}$ 0,5

3. a/ $u_0=z_0\bar z_0=2$

$u_1=z_1\cdot\bar z_1=4$ 0,5

$u_2=z_2\cdot\bar z_2=8$

b) D'après la question 2., en posant $z=z_n$, on obtient bien que $\underline{\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in\mathbb{R}}$ 0,5

c) $u_{n+1}=z_{n+1}\times\overline{z_{n+1}}$

$=(1+i)z_n\times\overline{(1+i)z_n}$

$=(1+i)\cdot\overline{(1+i)}\,z_n\cdot\bar z_n$

$u_{n+1}=2u_n$ 1

D'où (u_n) est géométrique de raison 2

Son premier terme est $u_0=2$.

d) On a $u_n=2\cdot2^n\;(=2^{n+1})$ 1

Comme $q=2>1$, $\underline{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$

Exercice 3 /3

1. $P(ai)=0 \iff -a^3i-(1+i)a^2+(i-1)ai-i=0$

$\iff -a^3i-a^2-ia^2-a-ia-i=0$

$\iff -a^2-a+i(-a^3-a^2-a-1)=0$ 2

$\iff \begin{cases} a^2+a=0 \\ a^3+a^2+a+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(a+1)=0 & L_1 \\ a^3+a^2+a+1=0 & L_2 \end{cases}$

$L_1 \iff a+1=0$ ou $a=0$ $\iff \boxed{a=-1}$ ($a=0$ impossible par L_2)

$\boxed{-i \text{ est racine de } P}$

2. $P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$

$=az^3+bz^2+cz+iaz^2+ibz+ic$

$=az^3+(b+ia)z^2+(c+ib)z+ic$

Par identification:

$\begin{cases} a=1 \\ b+ia=1+i \\ c+ib=i-1 \\ ic=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=i \end{cases}$ 2

donc $P(z)=(z+i)(z^2+z+i)$

Exercice 4 /3

1. On a:

$P(z)=(z^2+2)(az^2+bz+c)$

car le degré de P est 4.

Soit $P(z)=az^4+bz^3+cz^2+2az^2+2bz+2c$

$P(z)=az^4+bz^3+(c+2a)z^2+2bz+2c$

Par identification:

$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c+2a=3 \\ 2b=2 \\ 2c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$ 1,5

D'où $\underline{P(z)=(z^2+2)(z^2+z+1)}$

2. $P(z)=0 \iff z^2+2=0$ (E_1)

ou

$z^2+z+1=0$ (E_2)

$(E_1) \iff z^2=-2=(i\sqrt2)^2 \iff z=i\sqrt2$ ou $z=-i\sqrt2$

(E_2): $\Delta=-3<0$, $z_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt3}{2}$

D'où $\underline{S=\left\{-i\sqrt2;\ i\sqrt2;\ \frac{-1-i\sqrt3}{2};\ \frac{-1+i\sqrt3}{2}\right\}}$ 2

Exercice 5 /4

1, a) $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$

b) $z^4 - 1 = 0 \iff z \in \{-1; 1; -i; i\}$

2. $z \neq \frac{1}{2}$ sat $Z = \frac{z+2i}{2z-1}$

D'après ce qui précède, on a :

$Z^4 = 1 \iff Z \in \{-1, 1, -i, i\}$

→ $Z = 1 \iff \frac{z+2i}{2z-1} = 1 \iff z = 3+i$

→ $Z = -1 \iff \frac{z+2i}{2z-1} = -1 \iff z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

→ $Z = i \iff \frac{z+2i}{2z-1} = i \iff 2zi - i = z + 2i$

$\iff z(-1+2i) = 2+2i \iff z = \frac{2+2i}{-1+2i}$

$\iff z = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$

→ $Z = -i \iff \frac{z+2i}{2z-1} = -i \iff -2iz + i = z + 2i$

$\iff z(-1-2i) = 2i \iff z = \frac{2}{-1-2i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

Donc $\boxed{S = \{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i; \frac{2}{5} - \frac{6}{5}i; -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i; 3+i\}}$

Exercice 6 /2

1. $(x-2i)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k (-2i)^{4-k}$

$= (-2i)^4 + 4x(-2i)^3 + 6x^2(-2i)^2 + 4x^3(-2i) + x^4$

$= 16 + 32ix - 24x^2 - 8ix^3 + x^4$

2. $(x-2i)^4 \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}((x-2i)^4) = 0$

$\iff 32x - 8x^3 = 0$

$\iff x(32 - 8x^2) = 0$

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 32 - 8x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \end{cases}$

Pour $\begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$ ou, $(x-2i)^4 \in \mathbb{R}$.