

Limites de fonctions et géométrie dans l'espace – 2h

10/11/22

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1

On considère la fonction $h: x \mapsto \frac{3x-2}{1-x}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
La courbe de la fonction h admet-elle des asymptotes ? Justifier
- Calculer $h'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction h .

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

- Soit pour tout réel $x \neq 0$, la fonction f définie par $f(x) = x^3 - \sin(2x) - \frac{1}{2x}$.
 - Déterminer un encadrement de $f(x)$.
 - En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Soit pour tout réel x négatif la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x+3\cos x}{3-2x}$.
 - Déterminer un encadrement de $g(x)$.
 - En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

- Montrer que $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}$ pour $x \neq 0$.
- En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 4

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de [CD] et J le point défini par :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DB}$$

Démontrer que les vecteurs \overrightarrow{AJ} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires.

Exercice 5

On considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d' passant par B et de vecteur directeur \vec{v} .
- Le point $M(6; -8; -2)$ appartient-il aux deux droites d et d' ?
- Déterminer la position relative des deux droites.

Exercice 6

On considère les points $F(1; -1; 2)$ et $G(4; 5; -3)$ et la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -11 + 2t; t \text{ réel} \\ z = -1 - t \end{cases}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
2. Justifier que les droites d et (FG) ne sont pas parallèles.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

BONUS !

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\sqrt{x+n} - \sqrt{x}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

Barème Indicatif : Ex 1 : Ex 2 : Ex 3 : Ex 4 : Ex 5 : Ex 6 : Bonus : 2