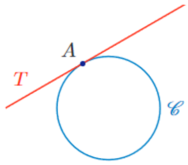
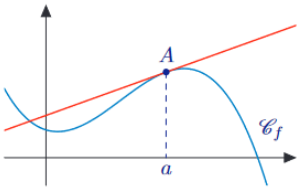
DERIVATION 1^{re}

La terre est ronde…Et pourtant, localement, elle peut nous sembler plate…

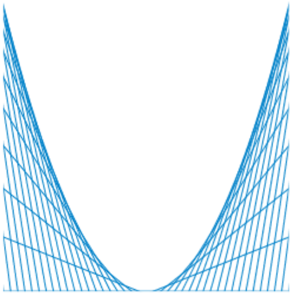


Un arc de cercle peut localement être assimilé à un segment de droite : à proximité de A, le cercle $\mathcal{C}$ et la tangente T sont presque confondus…



Essayons de généraliser cette idée : en « zoomant » suffisamment, la courbe d'une fonction peut ressembler à un segment de droite. On peut ainsi se faire une idée de la notion de tangente à une courbe qui sera développée ici.

L'intérêt de ce chapitre est de ramener l'étude de fonctions « compliquées » à l'étude de fonctions plus simples : les fonctions affines, représentées par les droites. En quelque sorte, connaître les tangentes « partout », c'est connaître la courbe. Sur le schéma ci-dessous, on devine une parabole. Pourtant, elle n'a pas été réellement dessinée : seules quelques-unes de ses tangentes ont été tracées.



Préliminaire - Introduction à la limite d'une fonction sur deux exemples

Exemple 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0.1	-0.01	-0.001	…	0.001	0.01	0.1	0.5
$f(x)$	1.5	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1	2.5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ ou aussi $f(x) \underset{x \to 0}{\rightarrow} 2$.

Exemple 2

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de $+\infty$. On dit que la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note :
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou aussi $g(x) \underset{x \to +\infty}{\rightarrow} 0$.

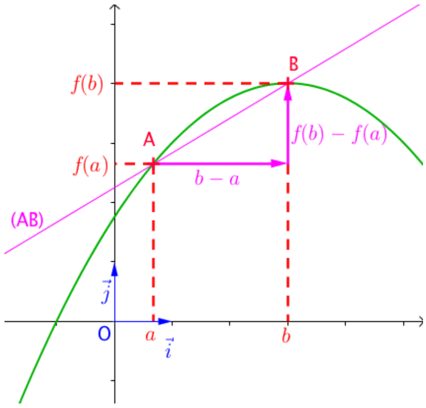
I Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On note C sa courbe représentative dans un repère.

1.1 Rappel

Soit deux réels *a* et *b* appartenant à I tels que *a* < *b*. Soit A et B deux points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives *a* et *b.*

Le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (AB) est égal à : $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



1.2 Nombre dérivé et fonction dérivable

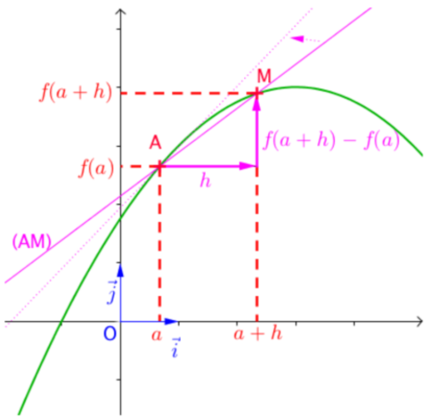
Définition On appelle taux de variation de f entre deux nombres a et $a+h$ (appartenant à I), avec $h \neq 0$; noté $\tau_{a,h}$:

$$\boldsymbol{\tau_{a,h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Soit A un point fixé sur C d'abscisse a. Son ordonnée est donc $f(a)$. On place un point M mobile sur C ($M \neq A$), on trace la droite (AM), qui est sécante à C jusqu'à le rendre *infiniment proche* de A. Pour cela, prenons $a+h$ pour l'abscisse du point M avec $h \neq 0$ et le coefficient directeur de toute sécante (AM) est donc :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tau_{a,h}$$

On fait ensuite « tendre » M vers A, c'est-à-dire que l'on fait tendre h vers 0.



Définition Soit a et $(a+h)$ appartenant à I. Dire que f est dérivable en a signifie que le taux de variation entre a et $a+h$, $\tau_{a,h}$, tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
Ce nombre L est appelé nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_{a,h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

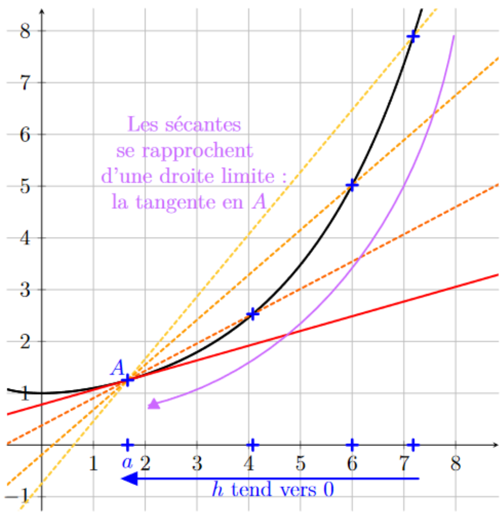
Remarque
Les physiciens notent souvent $\frac{df}{dx}$ au lieu de f' ; on utilise le symbole « d » au lieu de « Δ » pour signifier une variation infinitésimale ; car $a+h$ et a sont infiniment proches (h tend vers 0).

Exemples
1) Soit $f(x) = x^2 + 2x - 2$ et $a = 1$
La méthode (dans un 1er temps pour éviter les erreurs…) est la suivante : on calcule d'abord le taux de variation $\tau_{a,h}$ puis on passe à la limite. Si cette limite est un nombre L alors cette fonction est dérivable en a et $L = f'(a)$.
$\tau_{1,h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+2(1+h)-2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2+2+2h-2-1}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4.$
On a $\lim_{h\to 0} \tau_{1,h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4.$
Donc f est dérivable en 1 et on a $f'(1) = 4.$
2) Soit $g(x) = x\sqrt{x}$ et $a = 0.$
$\tau_{0,h} = \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}-0}{h} = \sqrt{h}.$
On a $\lim_{h\to 0} \tau_{0,h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h} = 0.$
Donc g est dérivable en 0 et on a $g'(0) = 0.$

1.3 Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Définition *Tangente à une courbe*
On appelle tangente à une courbe C en un point A, appartenant à C, une droite passant par A et qui, si elle existe, est au voisinage de A la droite la plus proche de C.

Soit $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$, deux points de la courbe C. La tangente à C en A est la « position limite », si elle existe, des sécantes (AM) lorsque M « tend » vers A.



On a vu que le coefficient directeur de toute sécante (AM) est la quantité $\tau_{a,h}$. On en déduit donc que lorsque h tend vers 0, le nombre $\tau_{a,h}$ tend vers le coefficient directeur de la tangente en A soit $f'(a)$.

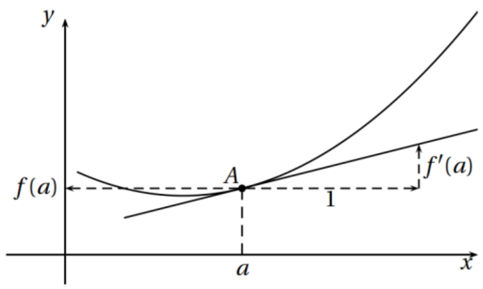
On a donc la propriété suivante :

Propriété Soit f dérivable en $a \in I$.
(i) Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
(ii) L'équation de la tangente au point $A(a\,; f(a))$ est la suivante : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

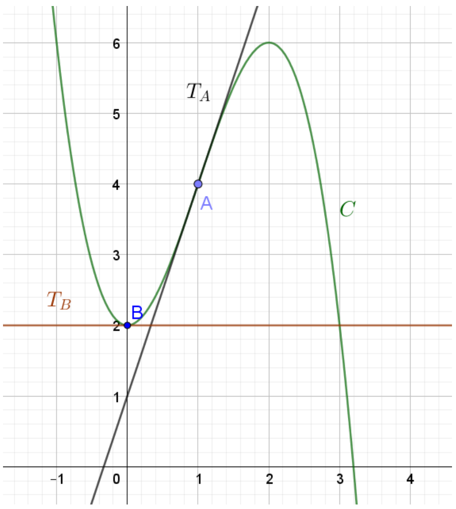
Démonstration ***exemplaire pour (ii)***
La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme : $y = f'(a)x + b$ où *b* est l'ordonnée à l'origine.
Déterminons *b* :
La tangente passe par le point A$\big(a\,; f(a)\big)$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Figure

Le point A appartient à la fois à la courbe de f et à la tangente. On dit que c'est le point de contact en au point d'abscisse a.

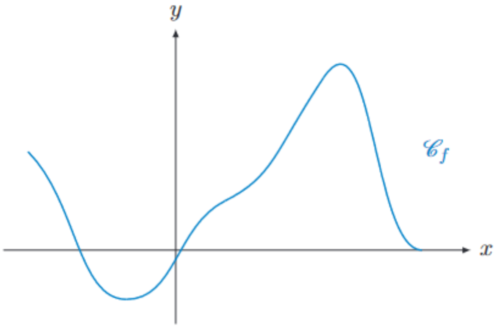


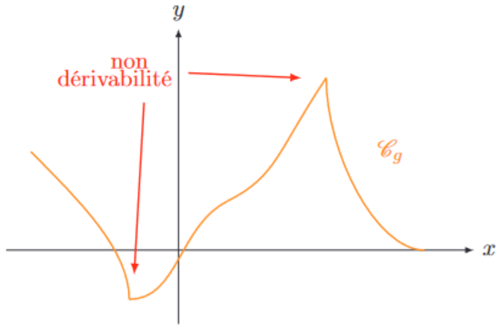
Exemples
1) Soit $f(x) = x^2 + 2x - 2$. Déterminons la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse.
On a vu plus haut que $f'(1) = 4$.
On a $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
On en déduit donc que $y = 4(x-1) + 1 = 4x - 4 + 1$.
Soit $y = 4x - 3$.



2) Soit *C* la courbe d'une fonction. T_A et T_B sont les tangentes à la courbe C aux points A et B.
Le coefficient directeur de T_A est 3 et son ordonnée à l'origine est 1.
D'où $T_A : y = 3x + 1$.
T_B est une « tangente horizontale » (parallèle à l'axe des abscisses) donc son coefficient directeur est nul. L'ordonnée à l'origine de T_B est 2.
D'où, $T_B :\ y_B = 2$.

Remarque – Cas des fonctions non dérivables
Graphiquement, une fonction est dérivable en un point lorsque sa courbe admet une tangente (non verticale) en ce point. En vulgarisant, on peut dire que la courbe d'une fonction dérivable est « lisse » (courbe bleue ci-dessous par ex., fonction dérivable partout) alors qu'en cas de non dérivabilité la courbe possède des « pics » (courbe orange par ex., deux points de non dérivabilité).





1.4 Complément : les vitesses

Supposons qu'un objet se déplace en ligne droite selon une équation du mouvement $s = f(t)$, où s est le déplacement (distance orientée) de l'objet depuis le moment choisi comme origine du temps jusqu'au temps t. On appelle fonction de position la fonction f qui décrit le mouvement de l'objet. Durant l'intervalle de temps $t = a$ jusqu'à $t = a + h$, le changement de position de l'objet est donné par $f(a + h) - f(a)$. La vitesse moyenne de l'objet sur cet intervalle de temps est calculée par :

$$vitesse\ moyenne = \frac{distance\ parcourue}{temps} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Supposons maintenant que nous calculions la vitesse moyenne sur des intervalles de temps $[a; a + h]$ de plus en plus courts. Autrement dit, nous faisons tendre h vers 0. Nous définissons dans ce cas-là, la vitesse instantanée $v(a)$ au moment $t = a$ comme la limite de cette vitesse moyenne :

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce qui signifie que la vitesse instantanée au moment $t = a$ est égale à $f'(a)$.

Exercice 1 *Vitesse d'une balle qui tombe*
Supposons qu'une balle soit lâchée du haut de la tour Eiffel, à 300 m au-dessus du niveau du sol. On admet que si $s(t)$ désigne la distance de chute (en m) après t secondes alors $s(t) = 4{,}9t^2$ (d'après la loi de Galilée qui dit que « la distance parcourue par un corps qui tombe librement est proportionnelle au carré du temps (il est fait abstraction de la résistance de l'air).
1. Quelle est la vitesse de la balle 5 secondes plus tard ?
2. Quelle est sa vitesse au moment de son impact ?

II Fonction dérivée

2.1 Définition

Un exemple pour comprendre

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a$$

f est dérivable pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$ et on vient donc de défini sur $\mathbb{R}$ une (nouvelle) fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f et se note f'. Ainsi $f' : x \mapsto f'(x)$.

Un peu d'histoire des maths

Le mot « dérivé » a été introduit par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736-1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de « provenir ») d'une autre fonction.

2.2 Fonctions de référence

Fonction *f*	Ensemble de définition de *f*	Dérivée *f '*	Ensemble de définition de *f '*
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

Tableau des dérivées des fonctions usuelles (à connaître par cœur !)

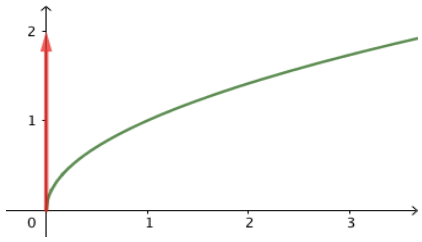
Exemples
1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'^{(x)} = -\frac{1}{2}$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$.
3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$.

Démonstrations ***exemplaires***

(i) La formule de la dérivée de la fonction carrée a été démontrée en haut de la page 6.

(ii) Démontrons la formule de la dérivée de la fonction inverse :
Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Démontrons que pour tout *x* de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$
Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}$
Pour tout nombre *a*, on associe le nombre dérivé de la fonction *f* égal à $-\frac{1}{a^2}$.
Ainsi, pour tout *x* de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

(iii) Démontrons que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
Soit la fonction *f* définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On calcule le taux de variation de *f* en 0 :
Pour $h > 0$: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \frac{h}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$
Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.
En effet, lorsque *h* tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.
Donc *f* n'est pas dérivable en 0.
Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.



2.3 Fonction valeur absolue

Définition La fonction valeur absolue est la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

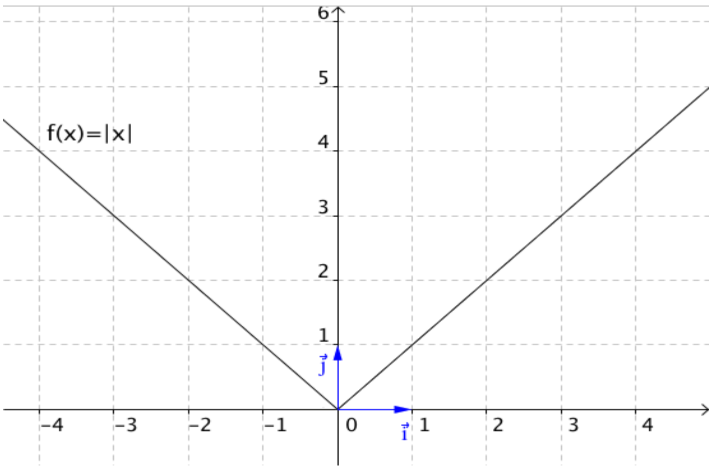
Propriété La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Démonstration
Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;\,+\infty[$, la fonction *f* est une fonction affine.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \|x\|$	↘	0	↗

Représentation graphique



Remarques

1) La courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, démontrons-le :

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = |x|$.

On calcule le taux de variation de f en 0 :

- Si $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Car $|h| = h$, si $h > 0$.

- Si $h < 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$

Car $|h| = -h$, si $h < 0$.

Donc selon que h soit négatif ou positif, le taux de variation de f en 0 tend vers deux réels différents, ce qui est contraire à la définition de la dérivabilité en un réel.

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0 (il existe cependant deux « demie-tangentes » à la courbe de f en ce point).

Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

III Opérations sur les fonctions dérivées

u, *v* et f sont trois fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u + v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où $k \in \mathbb{R}$	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
u^2 est dérivable sur I	$(u^2)' = 2u'u$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où *u* ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où *v* ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
$g: x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I, où $a, b \in \mathbb{R}$	$g'(x) = af'(ax+b)$

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées (à connaître par cœur !)

Remarque
Concernant la dérivée d'une somme de deux fonctions, on peut étendre cela à plusieurs fonctions. Par exemple, pour obtenir la dérivée d'un polynôme, on calcule les dérivées de chaque terme.

Exemples
1) Soit $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$. f est de la forme $f(x) = u(x) + v(x)$ où $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. On a : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Donc : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.
2) Soit $g(x) = \frac{1}{6}x^3$. g est de la forme $g(x) = ku(x)$ où $k = \frac{1}{6}$ et $u(x) = x^3$. On a : $u'(x) = 3x^2$. Donc : $g'(x) = ku'(x) = \frac{1}{6} \times 3x^2 = \frac{1}{2}x^2$.
3) Soit $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + x$. En utilisant la remarque ci-dessus, on a : $h'(x) = 2x^3 - 6x + 1$.
4) Soit $i(x) = (2\sqrt{x} - 1)(x^2 + 1)$. i est de la forme $i(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = 2\sqrt{x} - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$.
On a : $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2x$. Donc $i'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} + 2x(2\sqrt{x} - 1) = \frac{x^2+1+4x^2-2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $= \frac{5x^2-2x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
5) Soit $j(x) = (x^3 - 1)^2$. j est de la forme $i(x) = u^2(x)$ où $u(x) = x^3 - 1$. On a : $u'(x) = 3x^2$. Donc : $j'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times 3x^2(x^3 - 1) = 6x^2(x^3 - 1)$.
6) Soit $k(x) = \frac{1}{1-x^5}$. k est de la forme $k(x) = \frac{1}{u(x)}$ où $u(x) = 1 - x^5$. On a : $u'(x) = -5x^4$. Donc : $k'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{-5x^4}{(1-x^5)^2} = \frac{5x^4}{(1-x^5)^2}$.
7) Soit $l(x) = \frac{1-x}{x^2-1}$. l est de la forme $k(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = 1 - x$. On a : $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 2x$. Donc : $k'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{v^2(x)} = \frac{-(x^2-1)-(1-x)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+1-2x+2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)^2 = \frac{1}{x+1}$.
8) Soit $m(x) = \sqrt{2x - 1}$. m est de la forme $m(x) = f(ax + b)$ où $f(x) = \sqrt{x}, a = 2, b = 1$. On a : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc : $m'(x) = af'(ax + b) = 2f'(2x - 1) = 2\frac{1}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

*Démonstration **exemplaire** – dérivée du produit*
On veut démontrer que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}\, v(a+h) + u(a)\, \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque *h* tend vers 0, on a :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$
Car *u* et *v* sont dérivables sur I.

Et, $\lim\limits_{h \to 0} v(a + h) = v(a)$.
Soit, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$
Ainsi : $(uv)' = u'v + uv'$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $I =]2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. a) Vérifier que, pour tout x de $I, f(x) = 2 + \frac{8}{x-2}$.

b) Calculer $f'(x)$ en utilisant cette expression. Vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question 1.

3. Démontrer que la tangente T à la courbe C de f au point d'abscisse 3 a pour équation $y = -8x + 34$.

4. a) Montrer que, pour tout x de $I, f(x) - (-8x + 34) = \frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$.

b) En déduire la position relative de T et C sur I.

Histoire des mathématiques

Calcul différentiel

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux d'origines variées (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation). Il a vu le jour au 17^e siècle dans les écrits de Leibniz et Newton en se fondant sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement quand on leur applique des petites variations. Leurs approches partent de notions intuitives mais floues d'infiniment petit. Ce n'est que très progressivement que les notions de limites et de différentielles, qui en fondent l'exposé actuel, ont été clarifiées au 19^e siècle.

Gottfried Leibniz

Né le 1^{er} juillet 1644 à Leipzig et mort le 14 novembre 1716 à Hanovre.

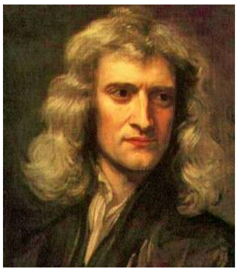
Il est le fils d'un professeur de philosophie morale de l'université de Leipzig. Dès l'âge de 6 ans, il campe dans la bibliothèque paternelle et devient un lecteur assidu. Il entre à 15 ans l'université, où il étudie la philosophie, la théologie et de droit. Il ne fait pas de mathématiques si l'on excepte sa découverte de l'œuvre d'Euclide lors d'un bref passage à l'université de Iena. Une fois son doctorat de droit en poche, Leibniz se met au service de l'électeur de Mayence, puis du prince de Hanovre, dans un poste de nature diplomatique. On l'envoie en mission en France, et se lie d'amitié avec Huygens. Il approfondit son étude des mathématiques. En 1673, lors d'un voyage à Londres, il rencontre des mathématiciens anglais et il est admis à la Royal Society. Newton l'accusera plus tard d'avoir lu son manuscrit sur la découverte du calcul différentiel, et une grande querelle de préséance surgira bientôt entre les deux hommes. Leibniz se rend aussi à La Haye, où il rencontre Spinoza, et à Delft, où il fait connaissance de Leeuwenhoek. En 1676, il doit rentrer en Allemagne. Il fonde en 1682 la revue Acta Eruditorum qui lui permet de diffuser ses découvertes, mais aussi ses notations, et de rester en contact avec les frères Bernoulli. En 1700, il fonde l'Académie de Berlin dont il devient le 1^{er} président. La fin de sa vie est assombrie par sa querelle avec Newton et sa relative disgrâce auprès des souverains de Hanovre.
Il meurt dans la solitude et son secrétaire, seul, assistera à ses funérailles.
De nombreuses idées de Leibniz préfigurent la théorie de la pensée moderne en physique, technologie, biologie, médecine, géologie, psychologie, linguistique, politique, loi, théologie, histoire, philosophie et mathématiques. Il améliora la machine à calculer de Pascal, développa la théorie binaire qui était la technologie numérique moderne, développa ce que nous connaissons sous le nom d'algèbre de Boole et la logique symbolique. Désirant être abordable, il est le plus grand créateur de notations. Il

introduit le d, abréviation de différence, pour la différentiation, ainsi que la notation $\frac{df}{da}(= f'(a))$, le symbole $\int$ –c'est le s de l'époque, première lettre du mot latin *summa* (somme), pour l'intégration. Il utilise systématiquement le point pour la multiplication et les deux points (:) pour la division. C'est grâce à lui et à Newton que le signe = se généralise. Il est, de plus, le premier à utiliser le terme de *fonction*.

Œuvres

- *Dissertatio de arte combinatoria (1666)*
- *Essais de théodicée (1710)*

Isaac Newton



Né en 1642 à Woolsthorpe et mort en 1727 à Kensington.

Isaac Newton, enfant chétif, distrait en classe, fait partie des élèves médiocres de l'école de Grantham. Il s'intéresse à la mécanique, écrit des vers et dessine. Par la suite, ses aptitudes se révèlent et on l'envoie en 1660 au Trinity College de Cambridge, où il obtient son diplôme en 1664. Une épidémie de peste oblige le collège à fermer et Newton se réfugie à Woolsthorpe. Les deux années qui suivent sont les plus fécondes de sa production mathématique, mais elle restera manuscrite. Lorsqu'il pourra la faire publier, la qualité de ses découvertes étant reconnue, il se passionnera pour l'alchimie. En 1669, son maître Barrow lui cède sa chaire de mathématiques à Cambridge. Ses travaux scientifiques concernent alors principalement la physique : l'optique, et surtout la théorie de la gravitation. Halley, impressionné par l'importance de ses découvertes, le pousse à les publier. Newton se met alors à la tâche et fait paraître ses *Principia*. Le monde scientifique se rend vite compte de l'importance de cette œuvre. La réputation de Newton est faite : il est comblé d'honneurs.
La fin de sa vie est improductive au niveau scientifique. Atteint d'une dépression nerveuse en 1693, il quitte Cambridge. En 1703, il devient président de la Royal Society, poste qu'il conservera jusqu'à sa mort. Il est anobli par la reine Anne en 1705.
Newton est considéré comme le fondateur, avec Leibniz du calcul différentiel et intégral. Ses travaux portent aussi sur les fonctions et sur les courbes. Il se passionne pour la théologie, et polémique pour établir la prééminence de ses travaux sur ceux de Leibniz. Il paraît maintenant certain que les œuvres des deux hommes ont été conçues indépendamment, celle de Newton précédant d'une dizaine d'années celle de Leibniz, mais ce dernier en donne une formulation plus explicite et mieux exploitable. Malheureusement, cette querelle divise le continent et l'Angleterre, où les mathématiques vont stagner un siècle durant.
Newton note les dérivées par un point situé au-dessus ($\dot{x}$). Son œuvre en physique est fondamentale : découverte de la nature de la lumière blanche, de la gravitation universelle.

Œuvres

- *Enumeratio curvarum trium dimensionum* (1667, non publié)
- *De methodis serierum et fluxionem* (1671, non publié)
- *De analysi* (1669, non publié)
- *Philosophiae naturalibus Principia mathematica* (1687)
- *Opticks (*1704)
- *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione* (1707)
- *The chronology of Ancient Kingdoms Amended* (1728)
- *Observations upon the Proheticies of Daniel and the Apocalypse of St John* (1733)

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Solution de l'exercice

1. On a après calcul : $v(a) = \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8\,a$. D'où $v(5) = 9{,}8 \times 5 = 49\ m/s$
soit 49*3,6=176 km/h.
2. Puisque la balle est lâchée d'une hauteur de 300 m, elle touchera le sol au moment t_1 tel que $s(t_1) = 300$ soit $4{,}9t^2 = 300$ ou encore $t = \sqrt{\frac{300}{4{,}9}} \approx 7{,}8\ s$.
La vitesse de la balle au moment de l'impact est donc $v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8 \times 7{,}8 = 76{,}5\ m/s$ soit 76,6*3,6=275 km/h.