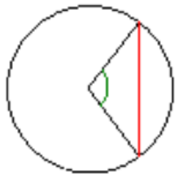
Histoire des mathématiques

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.
On attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.
Le grec Claude Ptolémée (90 ? ; 160 ?) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus (1436 ; 1476), de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus.*
Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propogation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques (fonctions $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \tan x$ qui seront vues en terminale).



Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I Cercle trigonométrique

1.1 Définition

Définition

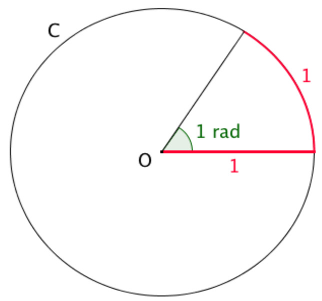
Figure

Remarques

1.2 Le radian

D'après ce qui vient d'être dit dans la remarque précédente, on va définir une nouvelle unité d'angle :

Définition



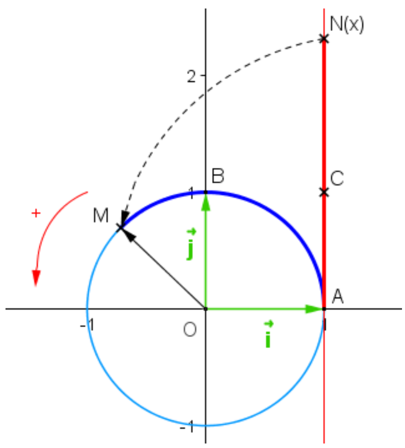
Correspondance degrés et radians

Angle en degré							
Angle en radian							

Remarque

Exemples

1.3 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique



Introduction

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A\,;\,\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite. Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse *x* de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

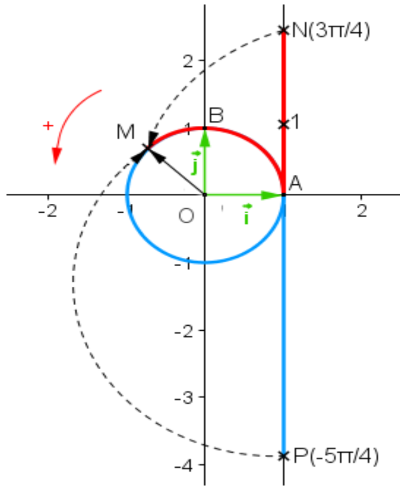
Vocabulaire

Propriété

Démonstration en exercice

Remarque

Exemples



Placement sur le cercle trigonométrique

Pour simplifier la lecture sur le cercle trigonométrique, on note le nombre réel au même endroit que son point image associé sur le cercle.

Propriété

Démonstration

Avec les notations de la figure, nous avons :

- I est repéré par 0 ;
- J est repéré par $\frac{\pi}{2}$;
- A est repéré par $\frac{\pi}{4}$ car la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$;
- B est repéré par $\frac{\pi}{3}$ car le triangle IOB est équilatéral (voir p6). De plus, B a pour abscisse $\frac{1}{2}$.
- C est repéré par $\frac{\pi}{6}$ car le triangle COC' est demi-équilatéral. De plus, C a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.

Remarque importante

Connaissant ces repérages particuliers dans le 1er quadrant, nous pouvons, grâce au cercle trigonométrique et à ses éléments de symétrie, placer sur ce dernier, des points repérés par des réels appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ ou $[0\,;2\pi[$ et plus généralement à $\mathbb{R}$, en « tournant de 2π » dans le sens direct ou indirect.

Exemple

Plaçons sur le cercle trigonométrique les points repérés par les réels suivants :

$$\frac{2\pi}{3}\,;\ -\frac{\pi}{3}\,;\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{6}\text{ et }-\frac{5\pi}{6}$$

II Cosinus et sinus d'un nombre réel

2.1 Définitions et propriétés

Définitions

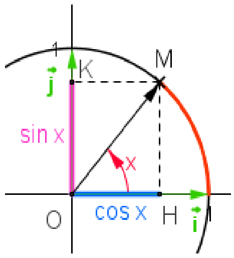
Remarque
Ce nouveau cosinus est-il différent de celui rencontré au collège dans le triangle rectangle ?
Il est légitime de se poser cette question vue la différence de cadre des deux définitions (d'un côté on travaille dans un triangle rectangle et de l'autre dans un cercle).

Au collège, seuls les angles aigus (entre 0° et 90°) ont un cosinus : on travaille dans le 1er quadrant du cercle trigonométrique. On a $\cos_{\text{lycée}} x = OH$ et $\cos_{\text{collège}} x = \frac{adjacent}{hypoténuse} = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$.
Les cosinus du collège et du lycée coïncident donc. Il en est de même pour le sinus et la tangente.
En revanche, la définition du lycée ne se réduit plus aux seuls angles aigus.

Propriétés

Remarque

Démonstrations



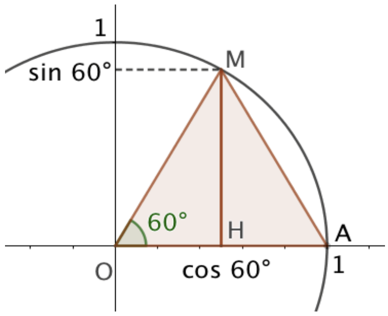
Voici ci-dessous les quatre quadrants du cercle trigonométrique du point de vue du signe du cosinus et sinus :

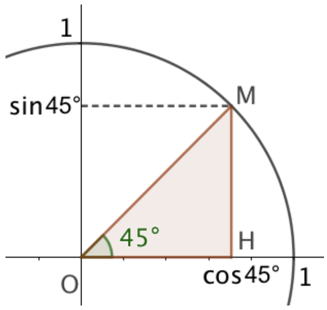
Exemples

2.2 Valeurs remarquables des cosinus et sinus

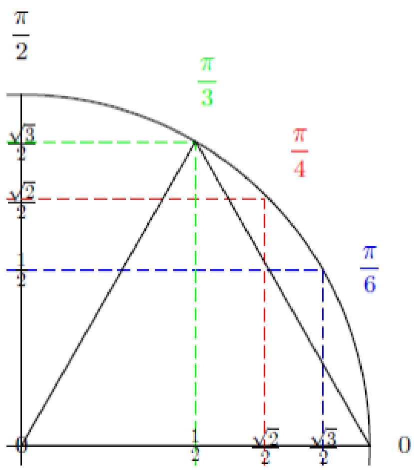
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$						
$\sin x$						

Démonstrations exemplaires





Figure

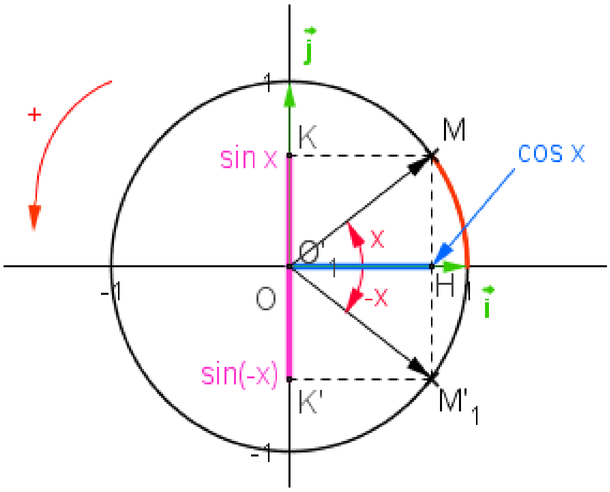


2.3 <u>Sinus et cosinus d'angles associés</u>

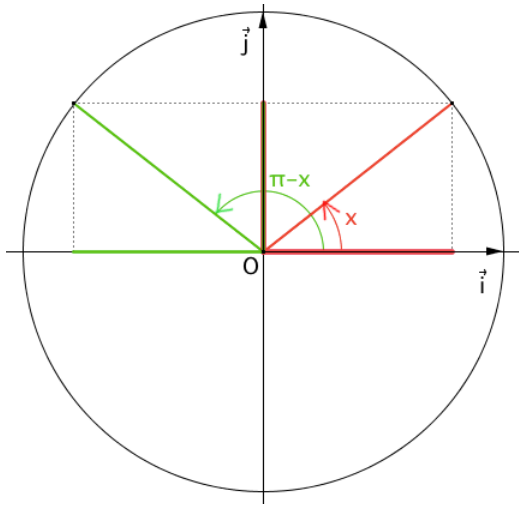
Propriétés

Démonstrations (« visuelles »)
Par symétries, on démontre les résultats :

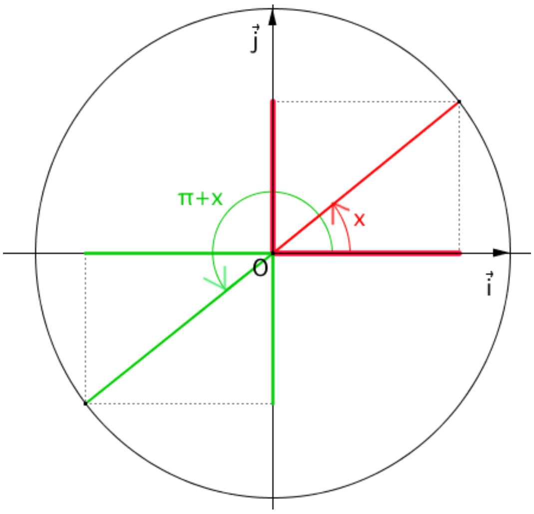
(i), (ii)



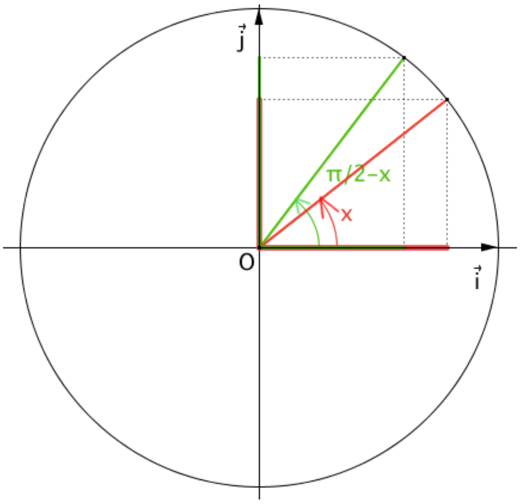
(iii), (iv)



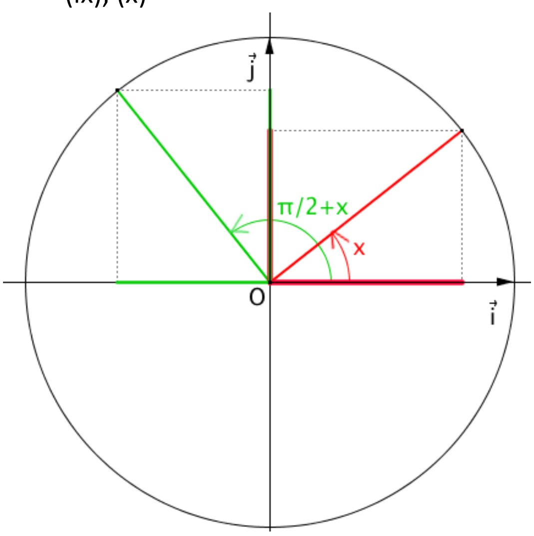
(v), (vi)



(vii), (viii)



(ix), (x)

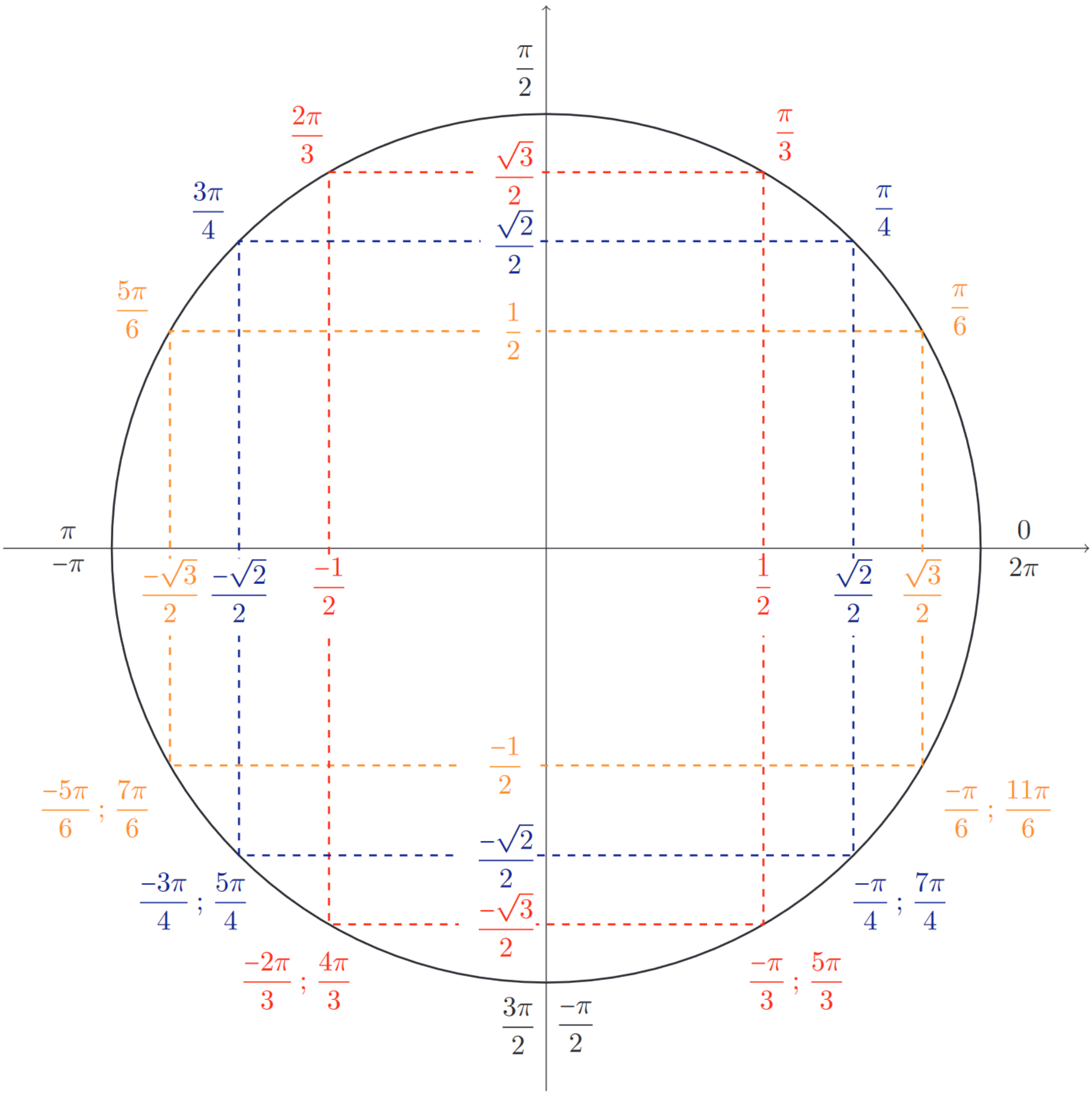


Exemples

Exercice 1

Simplifier $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x - \pi) + \cos(-x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique



Exercice 2

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$

III Fonctions cosinus et sinus

3.1 Définitions et propriétés

Définitions

Propriétés *Périodicité*

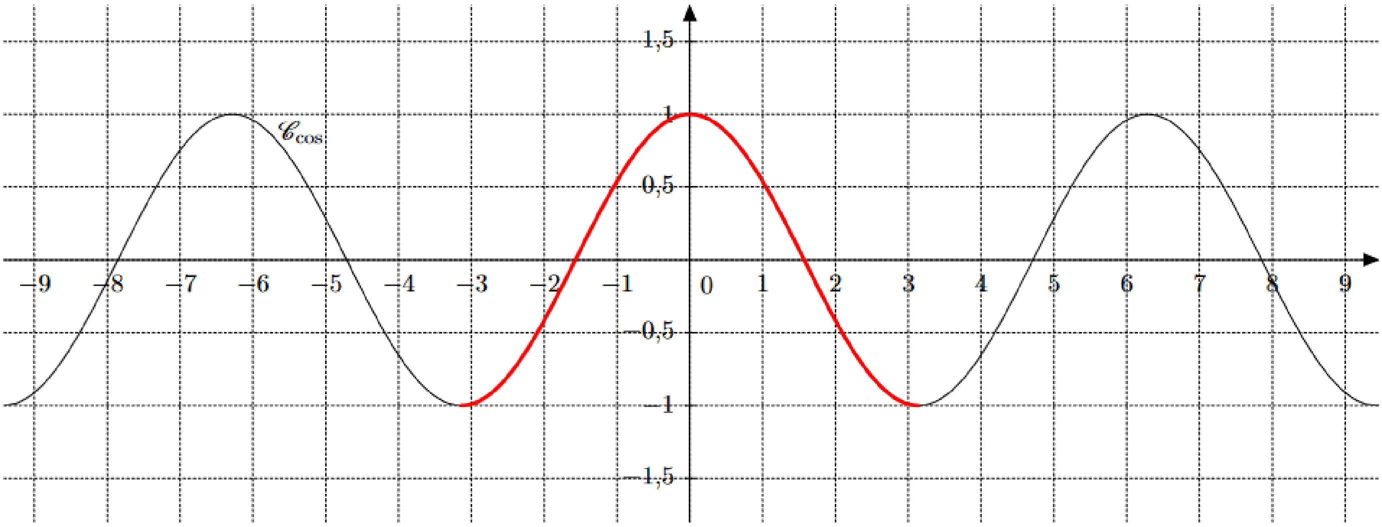
Remarque

Propriétés *Parité*

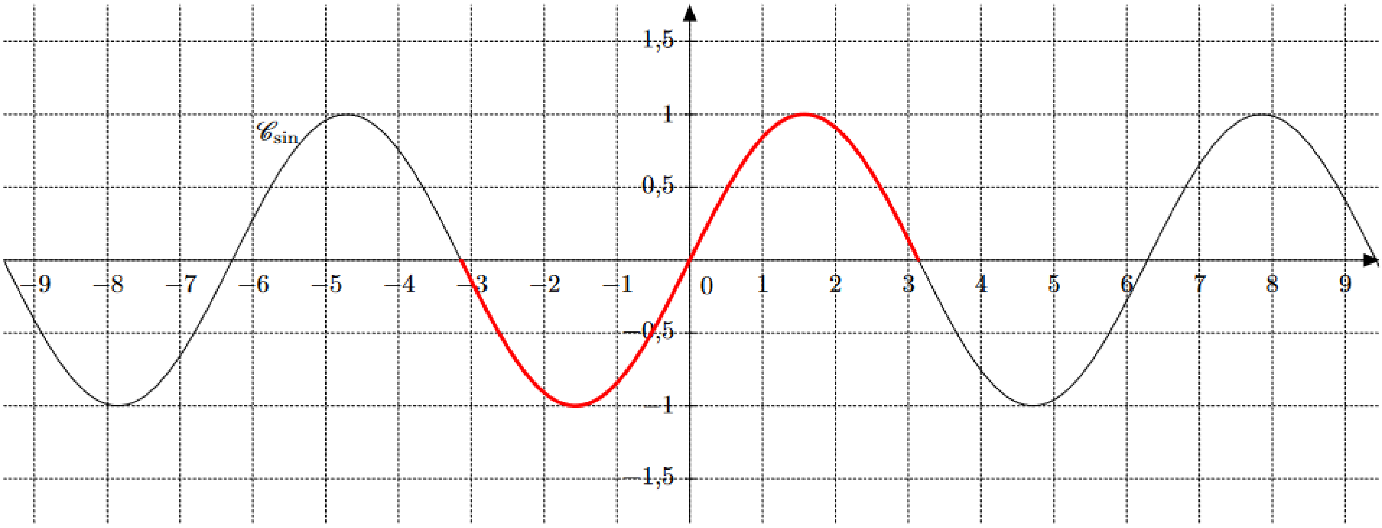
Remarque

3.2 Courbes représentatives

A l'aide de ce qui a été dit ci-dessus, en étudiant les fonctions cosinus et sinus sur $[0\ ;\ \pi]$, on va en déduire leurs tableaux de variations sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ puis leurs courbes représentatives.



$\mathscr{C}_{\cos}$
1,5
1
0,5
−0,5
−1
−1,5
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9



$\mathscr{C}_{\sin}$
1,5
1
0,5
−0,5
−1
−1,5
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9