Exercices « type » sur les probabilités conditionnelles

Exercice 1

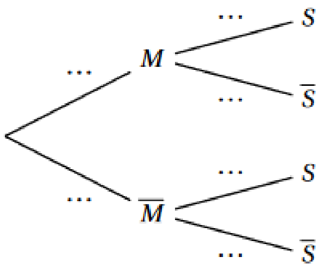
Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».

On note $\overline{S}$ et $\overline{M}$ les évènements contraires des évènements S et M.
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,95.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,96.

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, modélisant cette situation :



3. Montrer que $P(S) = 0{,}04182$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique en passant. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Exercice 2

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A et le site B. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles, le site B l'autre quart. Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut. Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

- 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses ;
- 4 % des aiguilles du site B sont défectueuses.

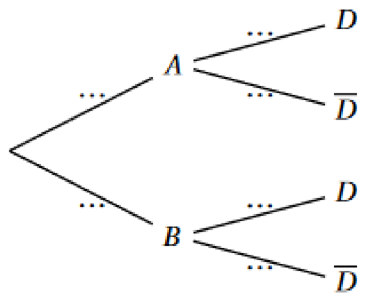
Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les évènements suivants :

- A : l'aiguille provient du site A ;
- B : l'aiguille provient du site B ;
- D : l'aiguille présente un défaut.

L'évènement contraire de D est noté $\overline{D}$

1. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur de la probabilité de l'évènement A que l'on notera $p(A)$.

2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilités ci-dessous en indiquant les probabilités sur les branches.



3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A?

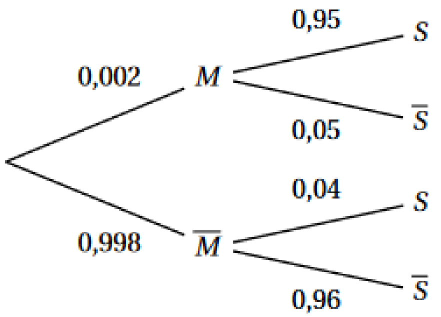
4. Montrer que $p(D) = 0,025$.

5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite sur le site A?

<u>**Corrigés**</u>

Exercice 1

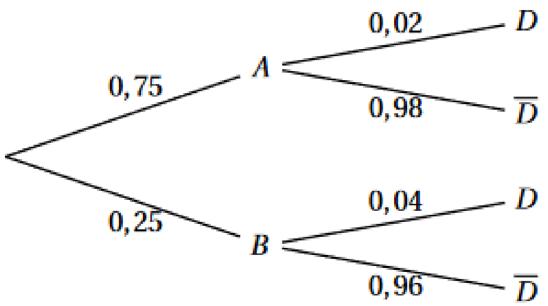
1. • $p(M) = \dfrac{1}{500} = \dfrac{2}{1000} = 0,002$;
   • $P_M(S) = 0,95$;
   • $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0,96$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, modélisant cette situation :



3. D'après la loi des probabilités totales : $p(S) = p(M \cap S) + p\left(\overline{M} \cap S\right)$.
   • $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,02 \times 0,95 = 0,0019$;
   • $p\left(\overline{M} \cap S\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(S) = 0,998 \times 0,04 = 0,03992$.

   Donc $p(S) = 0,0019 + 0,03992 = 0,04182$
4. On a $p_S(M) = \dfrac{p(S \cap M)}{p(S)} = \dfrac{p(M \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,0019}{0,04182} \approx 0,0454$, soit 0,045 au millième près (environ 4,5 %).

Exercice2



1. $p(A) = \dfrac{3}{4} = 0,75$.
2. Voir ci-dessus.
3. Il faut calculer $p(D \cap A) = p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
4. On a aussi $p(D \cap B) = p(B \cap D) = p\left(\overline{A}\right) \times p_B(D) = 0,25 \times 0,04 = 0,01$.

   D'après la loi des probabilités totales $p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap B) = 0,015 + 0,01 = 0,025$.
5. Il faut calculer $p_D(A) = \dfrac{p(D \cap A}{p(D)} = \dfrac{0,015}{0,025} = \dfrac{15}{25} = 0,6$.