ETUDE DE FONCTIONS — Term

Compléments sur la dérivation, convexité et continuité

I Compléments sur la dérivation

1.1 Dérivée d'une fonction composée

Propriété Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J.
Soit une fonction v définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$.
La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\boldsymbol{f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)}$ ou encore
$f' = v' \circ u \times u'$.

Démonstration admise

Exemple
Déterminons la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.
On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$
Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$
On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$
Donc : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = e^{x^2+1} \times 2x = 2xe^{x^2+1}$.

1.2 Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Démonstrations
- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$
Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Soit $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- $(u(x))^n = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$
Donc $((u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$
Soit $((u(x))^n)' = nu'(x)(u(x))^{n-1}$
- Démonstration analogue pour « e^u ».

Exemples
1) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$. On pose : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 4$
Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}} = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$
2) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$. On pose : $g(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$
Donc : $g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3 = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$

On note C sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.

3. Étudier les variations de f.

4. Tracer les asymptotes à la courbe C puis la courbe C.

1.3 Dérivée seconde

Définition Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I ; on dit dans ce cas-là que f est deux fois dérivable sur I.
On appelle fonction dérivée seconde ou d'ordre 2 de f sur I la dérivée de f' et on note :
$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Remarque et notation

On peut également calculer des dérivées d'ordre 3, 4, 5, …, n avec $n \in \mathbb{N}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième. En particulier : $f^{(0)} = f$; $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$.

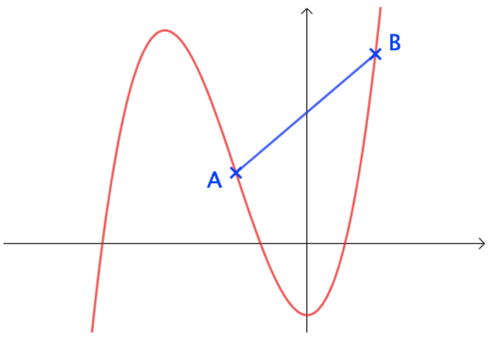
Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 9x^2 - 10x$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 18x - 10$.

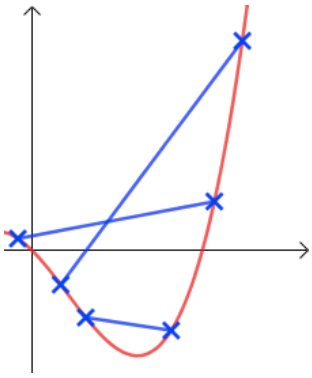
II Convexité

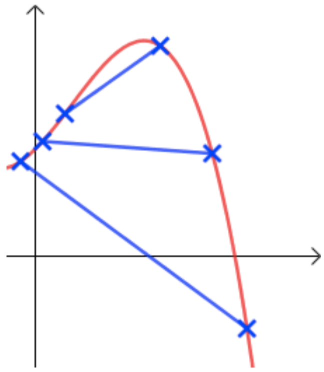
2.1 Fonction convexe et fonction concave

Définition Une corde est un segment reliant deux points d'une courbe.



Définitions Soit une fonction f définie sur un intervalle I
(i) La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
(ii) La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



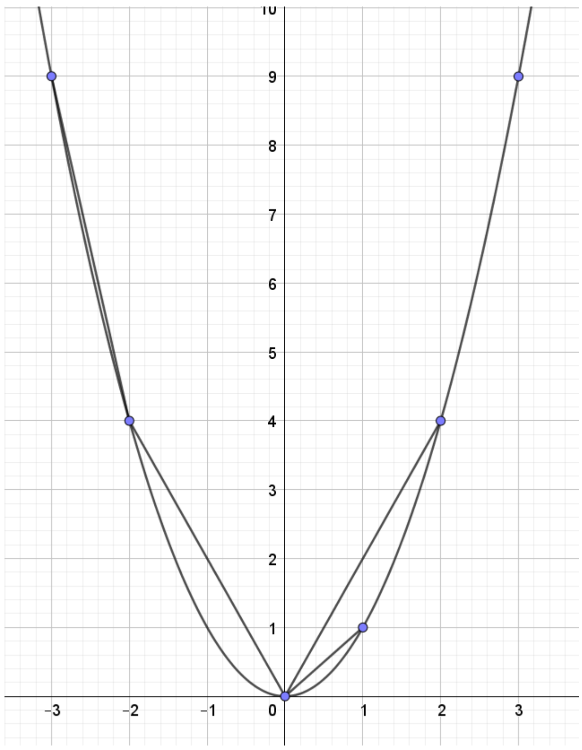


Fonction convexe

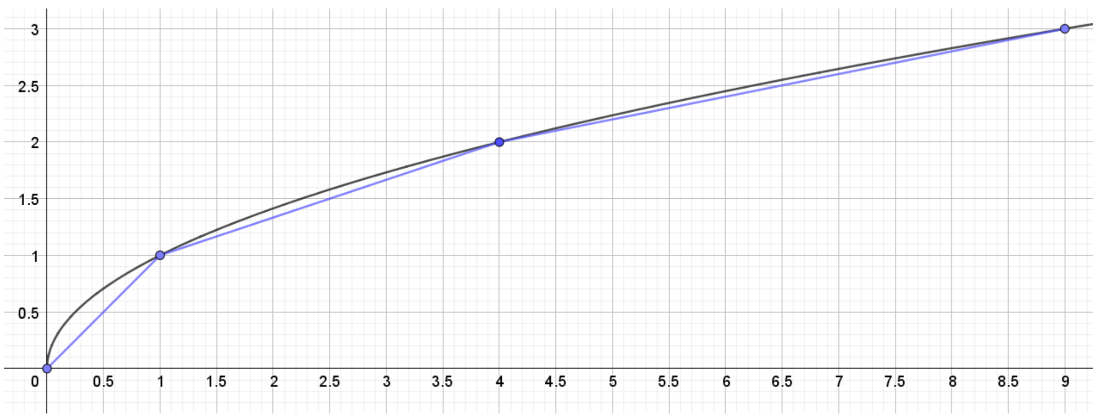
Fonction concave (forme arrondie vers l'intérieur)

Exemples

1) La fonction carré est convexe. En effet, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.



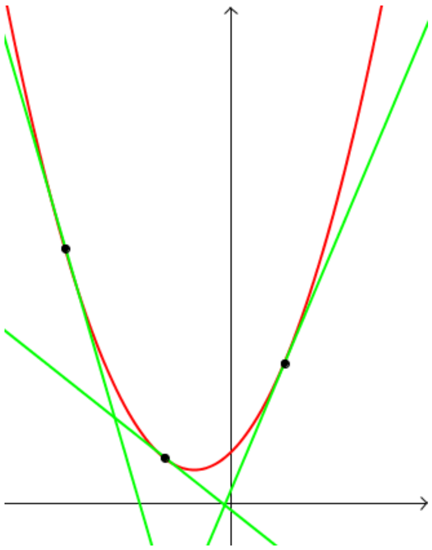
2) La fonction racine carrée est concave. En effet, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

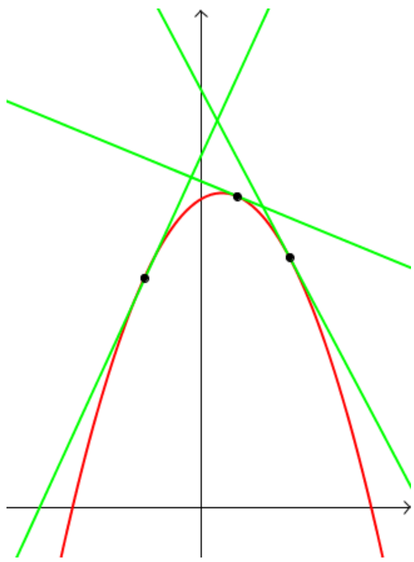


Remarque
L'étude de la convexité apporte des indications sur la façon de croître ou de décroître d'une fonction. Ainsi, une fonction croissante convexe « croît de plus en plus », comme la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$. Au contraire, une fonction croissante concave croît « de moins en moins », comme la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

Il existe d'autres définitions de la convexité et concavité d'une fonction à l'aide des tangentes :

Définitions Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I
(i) La fonction *f* est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
(ii) La fonction *f* est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.


Fonction convexe


Fonction concave

2.2 Propriétés

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
(i) f est convexe sur I si, et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I cad **pour tout *x* de I,** $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$
(ii) f est concave sur I si, et seulement si sa fonction dérivée f' est décroissante sur I cad **pour tout *x* de I,** $\boldsymbol{f''(x) \leq 0.}$

Démonstration exemplaire
(i) Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :
On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :
$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.
Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

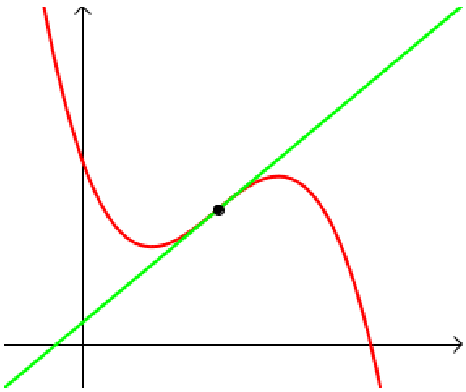
En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur I.
Soit $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

(ii) Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

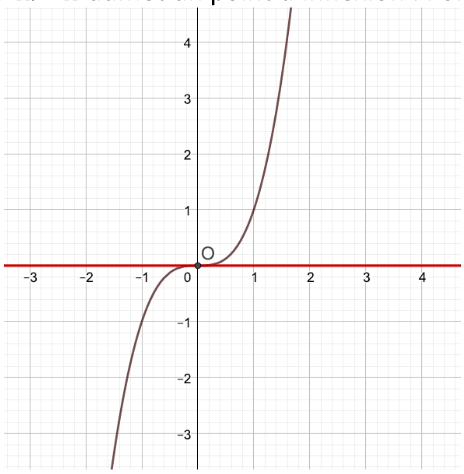
Exemple
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Étudions la convexité de la fonction f.
Pour tout *x* de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.
Pour tout *x* de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.
Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$. Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.
Donc f est concave sur $]-\infty\,;9]$ et f est convexe sur $[9\,;\,+\infty[$.

2.3 Point d'inflexion

Définition Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Exemple
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$ admet un point d'inflexion : l'origine du repère, O (0 ;0).



Propriété Soit une fonction f deux fois dérivables sur un intervalle I. C est sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$. Le point $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de C si, et seulement si, f'' s'annule en a et change de signe.

Démonstration admise

Remarque
En un point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exercice 2
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
1. Étudier la convexité de la fonction f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1.
3. En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

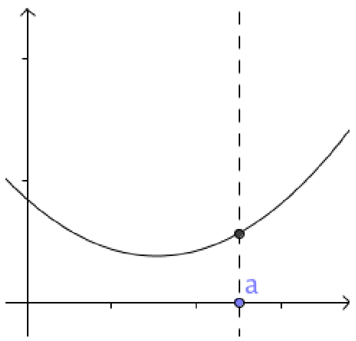
III Continuité et applications

3.1 Notion de continuité

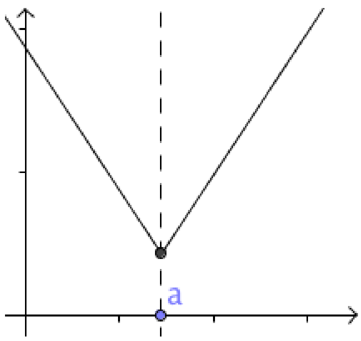
Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel contenu dans I.
(i) f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Autrement dit, f est continue en a si : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
(ii) f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque
Si f est continue sur I, alors sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon sur I.

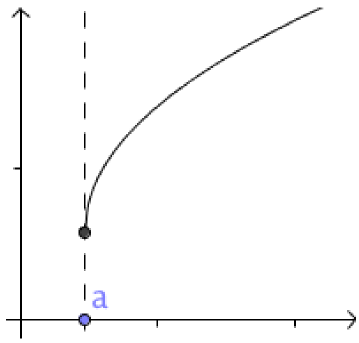
Exemples et contre-exemples



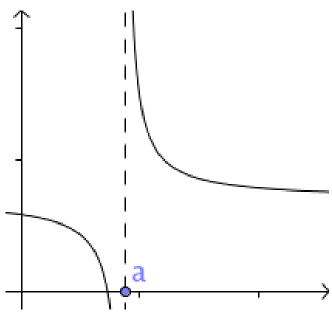
f est continue en a



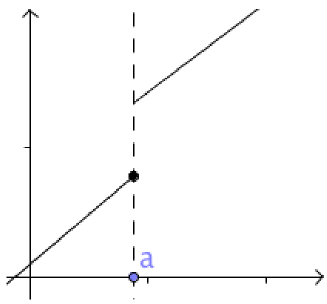
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Exemples

1) Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

3) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et elle est continue sur $]0\,;+\infty[$.

4) La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{2+x}}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. f n'est pas continue en 0.

En effet, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ qui ne correspond pas à $f(0)$.

Théorème Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I

Démonstration admise

Remarque

La réciproque est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 (idem avec la fct valeur absolue).

Propriété Toute fonction définie sur un intervalle I et égale à une somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues sur I est continue sur I.

Démonstration admise

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fct continues.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \ pour\ x < 3. \\ x-4, \ pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \ pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

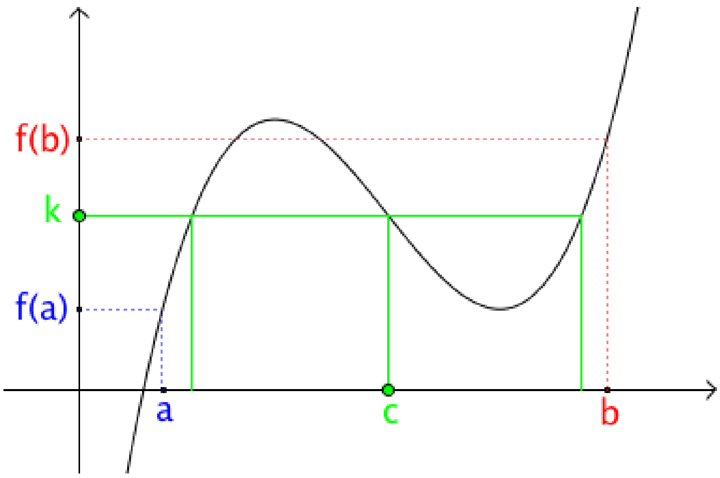
Histoire des mathématiques

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction. Il est l'ainé d'une famille catholique de 4 enfants dont aucun ne se mariera : la cause est sans doute l'attitude écrasante de leur père. Très bon élève dans le secondaire, il est envoyé à Bonn par son père pour y étudier le droit et les finances. Indifférent à ces disciplines, il se rend à Münster où il rencontre Gudermann, qui lui communique son goût pour les mathématiques. Il enseigne dans un lycée de Bonn jusqu'en 1856, date à laquelle il obtient un poste à Gewerbeinstitut. Ce n'est qu'en 1864 qu'il devient professeur à l'université de Berlin, où il peut se consacrer entièrement à sa passion pour les mathématiques. C'est sans doute en raison de son passage dans l'enseignement secondaire que s'affirment ses talents de pédagogie. Les premiers travaux de Weierstrass concernent les intégrales elliptiques et les fonctions abéliennes. Etudiant les nombres réels, il en donne une construction, élaborée à partir de 1863, publiée en 1872.

Weierstrass construit de nombreuses fonctions nouvelles, réelles ou complexes. On lui doit un exemple de fonction continue qui n'est dérivable en aucun point. Il publie en 1885 son célèbre théorème d'approximation polynomiale uniforme pour une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. Surnommé parfois le père de l'analyse moderne, Weierstrass est à l'origine d'une très grande rigueur dans les mathématiques.

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème *des valeurs intermédiaires (TVI)*
Soit la fonction *f* définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*].
Pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que $f(c) = k$.



Pour tout réel k comprise entre f(a) et ((b), la droite d'équation y=k coupe **au moins une fois** la courbe de la fonction f en un point d'abscisse entre a et b.

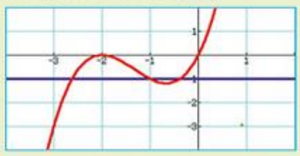
Conséquence
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle [*a* ; *b*].

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.
Démontrer qu'il existe au moins un réel **c** compris entre -3 et 0 tel que $f(c) = -1$.

• La fonction *f* est une fonction polynôme, donc *f* est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
• $f(-3) = (-3)^3 + 4\times(-3)^2 + 4\times(-3) = -3$
$f(0) = 0$
Ainsi, -1 est compris $f(-3)$ et $f(0)$.
• Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel **c** compris entre -3 et 0 tel que $f(c) = -1$.

La calculatrice permet de visualiser cette situation.
L'équation $f(x) = -1$ a en fait trois solutions exactement (voir exercice **13**).



Corollaire *du Théorème des valeurs intermédiaires*
Soit la fonction *f* définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [*a* ; *b*].
Pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel *c* compris entre *a* et *b* tel que $f(c) = k$.

Application aux équations
Le TVI est un théorème d'existence : il affirme l'existence d'au moins une solution d'une solution d'une équation $f(x) = k$ mais il ne permet de connaître le nombre exact de solutions ni les valeurs exactes. Par contre le corollaire du TVI nous dit qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = k$.

Exemple
Soit $f : x \mapsto 0{,}1x^3 + x - 4$, la fonction définie sur l'intervalle [2 ; 3). Considérons l'équation $f(x) = 0$.
On dresse le tableau de variation de la fonction f.

$f'(x) = 0{,}3x^2 + 1$.

On constate que $f'(x) > 0$ ($f'(x)$ est la somme de deux termes positifs).

x	2		3
f	-1,2	$\nearrow$	1,7

On applique le corollaire : f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$. De plus, $0 \in [-1{,}2;1{,}7]$ Donc, l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[2;3]$ que l'on note α. À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de la solution : $\alpha = 2{,}48$.

Exercice 4

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-2x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$. *Indication : Factoriser le polynôme* $x^2 - 2x$.

2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ puis donner un encadrement de ces solutions d'amplitude 10^{-3}.

5. L'équation $f(x) = 0{,}1$ admet-elle une solution ? Justifier.

Histoire des mathématiques

C'est en 1821 que le mathématicien Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) énonce le théorème des valeurs intermédiaires puis en donne une démonstration. Fuyant la Terreur, la famille Cauchy s'installe à Arcueil. Dans cette ville, il y rencontre Laplace et Berthollet. Très brillant élève, il entre à l'âge de 16 ans à Polytechnique. Devenu ingénieur militaire, Cauchy travaille de 1810 à 1813, aux fortifications du port de Cherbourg lors du blocus. Dans le même temps, il s'intéresse aux mathématiques, il échange des lettres avec Lagrange sur le nombre de côtés, de faces et de sommets d'un polyèdre. A son retour à Paris, ce dernier l'encourage à se consacrer aux mathématiques. En 1816, il obtient un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à Polytechnique et au collège de France. La même année, il est élu à l'académie des sciences où il remplace Monge, évincé pour des raisons politiques. Légitimiste convaincu, Cauchy refuse de prêter serment d'allégeance à Louis-Philippe et s'exile en 1830. Une chaire de physique mathématique est créée pour lui à l'université de Turin. Il la quitte en 1833 pour s'occuper de l'éducation du comte de Chambord, prétendant légitimiste au trône, exilé à Prague. Il rentre en France en 1838, lorsqu'on le dispense du serment d'allégeance. Il retrouve son poste à Polytechnique où il enseigne jusqu'à sa mort.
L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse, discipline où il a su donner un cadre rigoureux et nécessaire à son développement. Ses recherches concernent tous les domaines des mathématiques, en particulier les fonctions de la variable complexe, les équations différentielles, l'algèbre linéaire. On lui doit des travaux en physique, où il donne les bases de la théorie de l'élasticité, et en astronomie.
L'œuvre de Cauchy est fondamentale tant en analyse qu'en algèbre. Elle est le lien entre les mathématiques de la fin du dix-huitième siècle, encore imprégnées par la réalité physique, et celles de la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, où l'on s'efforce de construire une science justifiée rigoureusement et qui prétend de plus en plus à se suffire à elle-même.

3.3 Application à l'étude des suites

Propriétés Soit la fonction f définie et continue sur un intervalle I.
(i) Soit (u_n) une suite telle que u_n appartient à I pour tout entier naturel n. Si (u_n) converge vers un réel l appartenant à I alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.
(ii) Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \in$ I. On suppose que $f(I) \subset I$ (pour tout x de I, f(x) appartient à I). Si la suite (u_n) converge vers un réel l, alors l vérifie $f(l) = l$.

Démonstrations en exercice

Remarque
La propriété (ii) est appelée théorème du point fixe.

Exemples
1) Soit $v_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$.

- Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n}$ et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \in]0\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[\subset \mathbb{R}$, donc $v_n = f(u_n)$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, la suite (u_n) converge vers $\ell = \mathbf{0}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en $\mathbf{0}$

Ainsi, la suite (v_n) converge vers $f(\mathbf{0})$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

2) (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

On admet que cette suite converge vers l.
Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;\, +\infty[$par $f(x) = \sqrt{3x+4}$. On montre par récurrence que $u_n \in I$. f étant continue sur I et $f(I) \subset I$, l vérifie $f(l) = l$. Résolvons l'équation $f'x) = x$ dans I.

Dans l'intervalle I, $\sqrt{3x+4} = x$ équivaut à $3x + 4 = x^2$, c'est-à-dire $x^2 - 3x - 4 = 0$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$ donc $x = \frac{3+5}{2} = 4$ ou $x = \frac{3-5}{2} = -1$. Or, $-1 \notin \mathrm{I}$ donc $\ell = 4$.
Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\ell = 4$.

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. La fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est définie pour $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{2x}{3x+1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}\right[\cup [0\ ;\ +\infty[$.

2. - Recherche des limites à l'infini :
La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.
Levons l'indétermination :
$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2x}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{3+\frac{1}{x}}$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$
Et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}$

On en déduit, comme limite de fonction composée, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ainsi, la droite d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Recherche de la limite en $-\frac{1}{3}$:

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} 3x+1 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} 2x = -\frac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} \frac{2x}{3x+1} = +\infty$.

Donc, comme limite de fonction composée, on a : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = +\infty$.

En effet : $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, en considérant que $X = \frac{2x}{3x+1}$.

Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C.

3. On pose : $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{2(3x+1)-3\times 2x}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(3x+1)^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{\frac{1}{(3x+1)^2}}{\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

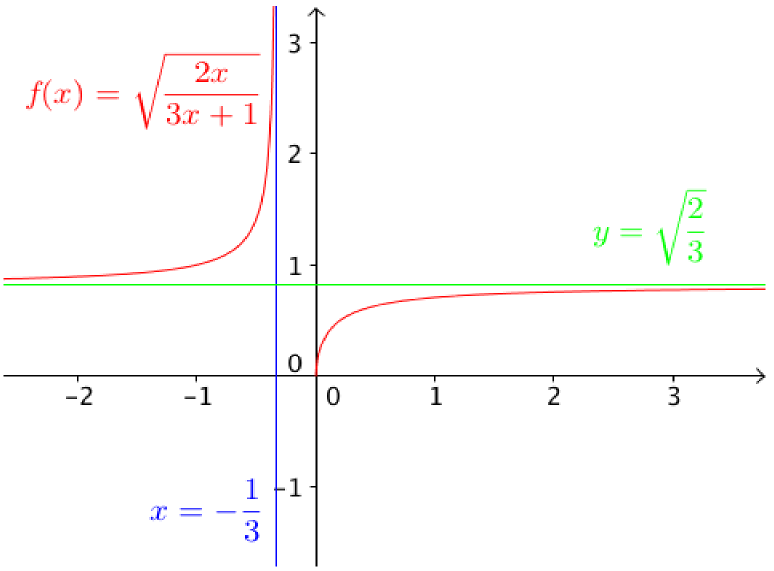
Et donc $f'(x) > 0$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$ $-\frac{1}{3}$		0 $+\infty$
$f'(x)$	+	//////////////////////////////	+
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ ↗ $+\infty$	//////////////////////////////	0 ↗ $\sqrt{\frac{2}{3}}$

A noter : On met une double barre pour la dérivée en 0. En effet, si $x = 0$, le dénominateur de la dérivée s'annulerait. La fonction dérivée f' n'est pas définie en 0.

5.



Exercice 2

1. Pour tout *x* de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Pour tout *x* de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 6x - 4$ qui s'annule pour $x = \frac{2}{3}$.

Pour tout $x \leq \frac{2}{3}$: $f''(x) \leq 0$.

Pour tout $x \geq \frac{2}{3}$: $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right]$ et f est convexe sur $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

2. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en –1 est de la forme :

$$y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)$$

Or, $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$ et $f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$

Donc, l'équation de la tangente en –1 est : $y = 7(x+1) - 3$

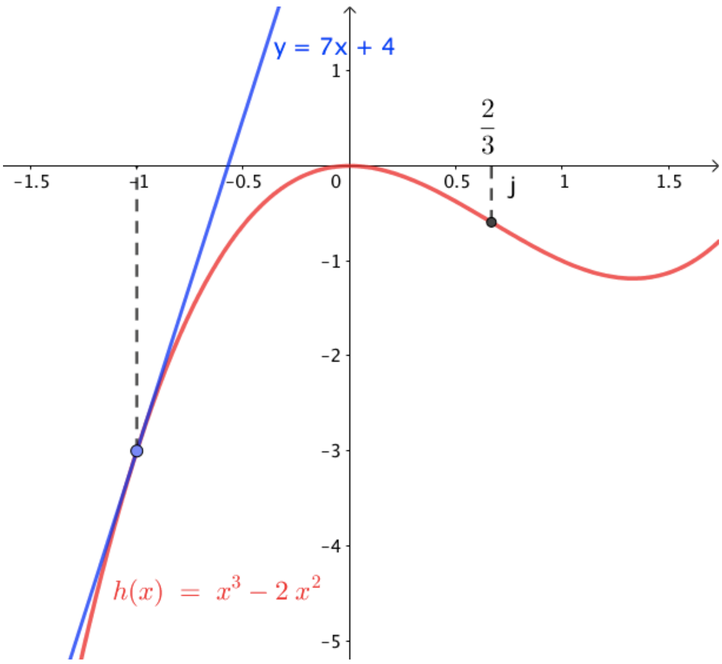
Soit : $y = 7x + 4$

3. f est concave sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de f est située en dessous de la tangente en –1.

On a ainsi, $f(x) \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$.

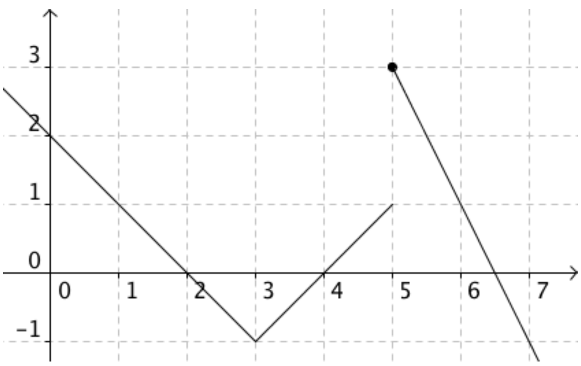
Soit $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ et donc en particulier pour tout x négatif.



Exercice 3

Les fonctions $x \longmapsto -x + 2$, $x \longmapsto x - 4$ et $x \longmapsto -2x + 13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty\,;3[$, sur $[3\,;\,5[$ et sur $[5\,;\,+\infty[$.



Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} -x + 2 = -3 + 2 = -1$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x - 4 = 3 - 4 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

donc la fonction f est continue en 3.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} x - 4 = 5 - 4 = 1$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} -2x + 13 = -2 \times 5 + 13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty\,; 5[$ et sur $[5\,;\ +\infty[$.

Exercice 4

1. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x(x-2)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-2) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$ et puis par composition avec l'exponentielle la limite est justifiée.

De la même façon, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x(x-2)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x(x-2) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = -\infty$ et puis par composition avec l'exponentielle la limite est justifiée.

Conseils

Bien vérifier à l'aide du graphe de la fonction que les limites sont cohérentes. Ne pas oublier les limites de référence de la fonction exponentielle comme celle-ci qui est utilisée au-dessus : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x} = 2(x-1)e^{x^2-2x}$.

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2-2x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x-1$. On en déduit donc le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$, f est continue (car f est une fonction exponentielle) et strictement décroissante. De plus, $2 \in \left[\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right]$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution x_1 à l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$.

Par ailleurs, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, f est continue et strictement décroissante. De plus, $2 \in \left[\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right[$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution x_2 à l'équation $f(x)=2$ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

En définitive, il existe deux solutions x_1 et x_2 à l'équation $f(x)=2$ dont leur encadrement est le suivant : $-0{,}302 \leq x_1 \leq -0{,}301$ et $2{,}3 \leq x_2 \leq 2{,}301$.

5. Comme le minimum de la fonction f est $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ et que $0{,}37 > 0{,}1$, on en déduit que l'équation $f(x)=0{,}1$ n'admet pas de solution.