Thème : Suites numériques

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5\,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. **a.** Démontrer que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 100$.

c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.