Sujet A

Question de cours

Calcul de $\int_c^x \frac{3t-5}{t^2-2t-3}dt.$

Exercices

Exercice 1

Calculer

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :

(a) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$

(c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

(a) $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = (1+\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$

(b) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,

Sol ex 1

Par intégration par parties

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

Sol ex 2

(a) Via $x = \cos t$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Via $x = \sqrt{t}$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+2x} = [\ln(1+2x)]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3$$

(c) Via $x = 1/t$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1/2} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{3/2}^{2} \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$$

Sol ex 3

(a) $y(x) = \frac{C+x+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

(b) $y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}$