Sujet C

Question de cours

Donner la définition d'une suite arithmético-géométrique.

Exercices

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 2

Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6u_{n+1} - 9u_n$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie et d'un type bien connu. Calculer v_n et en déduire la valeur de u_n (ne vous inquiétez pas si c'est assez moche !).

Sol ex 1

1. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : u_n > 2$ (ce qui prouvera au passage que (u_n) est bien définie puisqu'on aura alors toujours $u_n \neq 2$). La propriété P_0 est manifestement vraie. Supposons maintenant P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$. On a alors $u_n - 2 > 0$, donc $\dfrac{1}{u_n - 2} > 0$, puis $\dfrac{1}{u_n - 2} + 2 > 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour tout entier n.
2. D'après la question précédente, on a toujours $u_n - 2 > 0$, ce qui prouve la bonne définition de v_n.
3. Calculons donc $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(\dfrac{1}{u_n - 2} + 2 - 2\right) = \ln\left(\dfrac{1}{u_n - 2}\right) = -\ln(u_n - 2) = -v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géometrique de raison -1 et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 2$, d'où $v_n = (-1)^n \ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} + 2 = e^{(-1)^n \ln 2} + 2$. En fait, on aura $u_n = 2 + 2 = 4$ pour toutes les valeurs paires de n, et $u_n = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$ pour toutes les valeurs impaires de n (on parle de suite périodique, comme pour les fonctions, pour une suite reprenant ainsi toujours les mêmes valeurs).

Sol ex 2

1. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $s = \dfrac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
2. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \dfrac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha \times 3^0 = 0$ et $(\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \dfrac{1}{3}$, d'où $u_n = \dfrac{1}{3} n 3^n = n 3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).

Sol ex 3

La suite (v_n) est bien définie si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ce que nous allons prouver par récurrence. Posons donc $P_n : u_n > 0$. La propriété P_0 est manifestement vraie puisque $4 > 0$. Supposons désormais P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 0$. On a alors également $\sqrt{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} > 0$, ce qui prouve P_{n+1}. La suite (v_n) est donc bien définie.

Cherchons désormais à calculer v_{n+1} : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2\sqrt{n}) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln u_n = \ln 2 + \dfrac{1}{2} v_n$. La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = \ln 2 + \dfrac{1}{2} x$, ce qui donne $x = 2 \ln 2$. Posons donc une suite auxiliaire $w_n = v_n - 2 \ln 2$, et vérifions que (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 2 \ln 2 = \ln 2 + \dfrac{1}{2} v_n - 2 \ln 2 = \dfrac{1}{2} v_n - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(v_n - 2 \ln 2) = \dfrac{1}{2} w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2 \ln 2 = \ln(u_0) - 2 \ln 2 = \ln(4) - 2 \ln 2 = 0$. Finalement, la suite w_n est simplement la suite nulle, donc $v_n = w_n + 2 \ln 2 = 2 \ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} = e^{2 \ln 2} = 2^2 = 4$. La suite initiale était donc simplement constante, mais cette technique marche très bien en changeant la valeur initiale de u_0 en n'importe quoi d'autre de plus pénible.