Sujet A

Exercice 1

Étudier la nature des intégrales suivantes et donner leur valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt$$

$$\int_0^1 t\ln(t)\, dt$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et que $I_0 = 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in [0, +\infty[$, montrer que l'on a la relation

$$\int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

3. En déduire par récurrence que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $I_{n+1} = (n+1)\cdot I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire la valeur de I_n.

Exercice 3

Soit f l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x-y \end{pmatrix} \end{cases}$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer Ker f. f est-elle injective ?

<u>Correction ex 2</u>

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{\beta} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{\beta} = 1 - \mathrm{e}^{-\beta} \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} 1,$$

   donc l'intégrale I_0 est convergente et on a $I_0 = 1$.

2. Il suffit d'effectuer une intégration par parties.

3. On démontre $\mathscr{P}_n$: « L'intégrale I_n est convergente » par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, l'intégrale I_0 est convergente d'après la première question.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, le second membre dans la relation de la question 2 converge vers $(n+1) \cdot I_n$ lorsque $\beta \to +\infty$. On en déduit que l'intégrale I_{n+1} est convergente.

   Finalement, on a montré que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. C'est la relation que l'on a montré dans l'hérédité de la récurrence ci-dessus. On en déduit par récurrence que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Correction ex 3</u>

f est injective