Sujet B

Exercice 1

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

En posant $u = \sqrt{t}$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 2

On note f la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente.

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y, x-z, 3y+z)$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer Ker f.
f est-elle injective ?

Correction ex 2

1. On remarque ici que f est de la forme « $u'e^u$ » donc nous allons ici utiliser le calcul pour trouver la nature de l'intégrale.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction f est continue sur $[n; +\infty[$ donc le seul problème se situe en $+\infty$.
   Soit $A > n$: $\displaystyle\int_n^A f(x)\,dx = \left[-e^{1/x}\right]_n^A = -e^{1/A} + e^{1/n}$
   On a donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_n^A f(x)\,dx = e^{1/n} - 1$ et donc l'intégrale I_n est convergente et $I_n = e^{1/n} - 1$.
2. On sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on a $e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ ce qui signifie que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
3. Nous allons ici utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.
   f est bien une fonction continue et positive sur $[1; +\infty[$. De plus comme la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$ et que la fonction exponentielle est croissante, on a $x \to e^{1/x}$ qui est décroissante sur $[1; +\infty[$. On a aussi $x \to \dfrac{1}{x^2}$ qui est décroissante sur $[1; +\infty[$ donc f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
   On a montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente donc d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente.

Corr ex 3

f est injective