**Lycée militaire de Saint-Cyr** **DS n°3 de mathématiques** **Term**

**Calculatrice autorisée – durée : 2h** **08/12/22**

*Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.*

## Exercice 1

**Principaux domaines abordés :** suites; fonctions, fonction exponentielle.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 \mathrm{e}^x.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**1.** On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a.** Calculer $u_1$ puis $u_2$.
On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à $10^{-3}$.

**b.** On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n):
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à $10^{-3}$.

**2.** **a.** Démontrer que, pour tout $x$ réel, on a $f'(x) = x^2 \mathrm{e}^x (x+3)$.

**b.** Justifier que le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-27\mathrm{e}^{-3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**c.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

**d.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

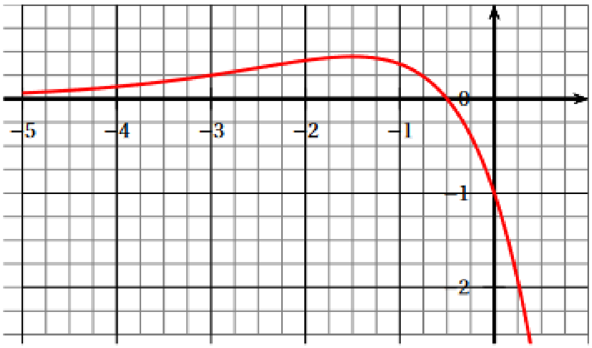
**e.** On note $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$.
On rappelle que $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer $\ell$. (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 \mathrm{e}^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).

**Exercice 2**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée $f'$ est donnée ci-dessous.
On admet que $f'$ admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée $f'$ de $f$.




**Question 1 :**

**a.** La fonction $f$ admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ ;

**b.** La fonction $f$ admet un maximum en $-\frac{1}{2}$ ;

**c.** La fonction $f$ admet un minimum en $-\frac{1}{2}$ ;

**d.** Au point d'abscisse $-1$, la courbe de la fonction $f$ admet une tangente horizontale.

**Question 2 :**

**a.** La fonction $f$ est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right[$ ;

**b.** La fonction $f$ est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ ;

**c.** La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f$ n'admet pas de point d'inflexion ;

**d.** La fonction $f$ est concave sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$.

**Question 3 :**
La dérivée seconde $f''$ de la fonction $f$ vérifie :

**a.** $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ ;

**b.** $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;\,-1]$ ;

**c.** $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ ;

**d.** $f''(-3) = 0$.

**Question 4 :**

On considère trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$. On sait que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

**a.** la suite $(v_n)$ converge ;

**b.** Si la suite $(u_n)$ est croissante alors la suite $(v_n)$ est minorée par $u_0$ ;

**c.** $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$ ;

**d.** la suite $(v_n)$ diverge.

**Exercice 3**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3\,;\,-2\,;\,2),\quad B(6\,;\,1\,;\,5),\quad C(6\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et } D(0\,;\,4\,;\,-1).$$

*On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :*

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{A} \times h$$

*où $\mathscr{A}$ est l'aire de la base et $h$ la hauteur correspondante.*

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5; 0; 1).
   a. Montrer qu'il existe des réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.
   b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.

**BONUS !**

Soit la fonction $f$ définie sur $[3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\sqrt{\frac{x-3}{x^2+3}}$$

1. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$.
2. Déterminer les variations de $f$

**Barème Indicatif : Ex 1 : Ex 2 : Ex 3 : Bonus : 2**

<u>**Corrigé du DS 3**</u> **(8/12/22)**

## Exercice 1

**1.** On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a.** • $u_1 = (-1)^3\,\mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,368$;

• $u_2 = f(u_1) = \left(-\mathrm{e}^{-1}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\mathrm{e}^{-3} \times \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\mathrm{e}^{-3-\mathrm{e}^{-1}} \approx -0,034$.

**b.** On a `fonc(2)` $= u_2 \approx -0,034$.

**2.** **a.** En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :

$f'(x)3x^2\,\mathrm{e}^x + x^3\,\mathrm{e}^x = x^2\,\mathrm{e}^x(3+x)$.

**b.** ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-27\,\mathrm{e}^{-3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Quel que soit le réel $x$, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations;

$3+x < 0 \iff x < -3$ : sur $]-\infty\,;\,-3[$, $f'(x) < 0$ : la fonction $f$ est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-3[$;

$3+x > 0 \iff x > -3$ : sur $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ : la fonction $f$ est donc croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times \mathrm{e}^{-3} = -27\,\mathrm{e}^{-3} = -\dfrac{27}{\mathrm{e}^3} \approx -1,344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

**c.** *Initialisation* : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$, on a bien : $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$ : l'encadrement est vrai au rang 0.

*Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

On a vu que sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de $f$ : $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$, ou encore :

$u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(0)$

et comme $u_1 \approx -0,338$, $-1 \leqslant u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n$, $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$ : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

**d.** La question précédente montre que :

- la suite $(u_n)$ est croissante;
- la suite $(u_n)$ est majorée par 0;

La suite $(u_n)$ est donc convergente vers une limite $\ell$, avec $\ell \leqslant 0$.

**e.** On résout dans $]-1\,;\,0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :
$f(x)=x \iff x^3\,\mathrm{e}^x = x \iff x^3\,\mathrm{e}^x - x = 0 \iff x\left(x^2\,\mathrm{e}^x-1\right)=0 \iff x=0$, car on admet que l'équation $x^2\,\mathrm{e}^x-1=0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-1\,;\,0[$.
Conclusion $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

## Exercice 2

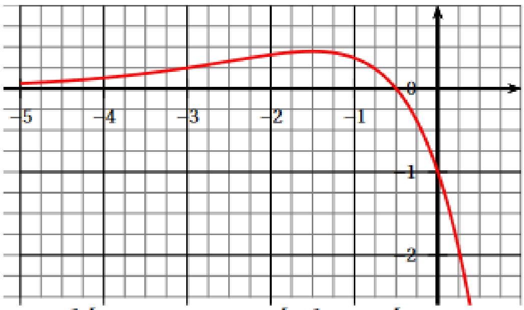
**Question 1 :**

**a.** La fonction $f$ admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ ;

**b.** La fonction $f$ admet un maximum en $-\frac{1}{2}$ ;

**c.** La fonction $f$ admet un minimum en $-\frac{1}{2}$ ;

**d.** Au point d'abscisse $-1$, la courbe de la fonction $f$ admet une tangente horizontale.




Par lecture graphique, la dérivée est positive sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ ; $f$ est donc croissante puis décroissante : elle admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Réponse **b.**

**Question 2 :**

**a.** La fonction $f$ est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right[$ ;

**b.** La fonction $f$ est convexe sur $\left]-\infty;\,-\frac{1}{2}\right[$ ;

**c.** La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f$ n'admet pas de point d'inflexion ;

**d.** la fonction $f$ est concave sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$.

$f'$ est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right[$ : $f$ est convexe sur cet intervalle. Réponse **a.**

**Question 3 :**
La dérivée seconde $f''$ de la fonction $f$ vérifie :

**a.** $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ ;

**b.** $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;\,-1]$ ;

**c.** $f''\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ ;

**d.** $f''(-3)=0$.

On a déjà vu que $f'$ est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right[$ ; elle est décroissante sur $\left]-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right)=0$. Réponse **c.**

**Question 4 :**

On considère trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$. On sait que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

**a.** la suite $(v_n)$ converge ;

**b.** Si la suite $(u_n)$ est croissante alors la suite $(v_n)$ est minorée par $u_0$ ;

**c.** $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$ ;

**d.** la suite $(v_n)$ diverge.

Si $(u_n)$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, donc la suite $(v_n)$ est minorée par $u_0$. Réponse **b.**

## Exercice 3

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Avec $A(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$, $C(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$et $D(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$, on obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

   Pour que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ soient coplanaires, il faut que (par exemple) le vecteur $\overrightarrow{AD}$ soit une combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Existe-t-il un couple de réels $(a\ ;\ b)$ tel que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}$ ? Cette égalité vectorielle se traduit par le système suivant :

   $$\begin{cases} 3a+3b &= -3 \\ 3a &= 6 \\ 3a-3b &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= -1 \\ a &= 2 \\ a-b &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3 \\ a &= 2 \\ -b &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3 \\ a &= 2 \\ b &= 3 \end{cases}$$

   C'est impossible. Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les points $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires.

2. Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 3+3\times 0+3\times(-3) = 9-9 = 0$. Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

   Le triangle $ABC$ est rectangle est rectangle en $A$.

3. Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ :

   $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = (-3)\times 3+6\times 3+(-3)\times 3 = -9+18-9 = 0$

   $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = (-3)\times 3+6\times 0+(-3)\times(-3) = -9+9 = 0$

   Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc orthogonal à tout vecteur du plan $(ABC)$.

4. Les questions précédentes permettent d'affirmer que le point $A$ est le projeté orthogonal du point $D$ sur le plan $(ABC)$. Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times AD$.

   $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

   $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

   $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

   Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times AC = \frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

   Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6} = 27$ unités de volume.

5. Soit $H(5\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

   a. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont :

   $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

   Existe-t-il un couple de réels $(\alpha\ ;\ \beta)$ tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$ ? Cette égalité vectorielle est équivalente permet d'écrire le système suivant :

   $$\begin{cases} -6\beta &= -1 \\ -3\alpha+3\beta &= -1 \\ -6\alpha-6\beta &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{1}{6} \\ -3\alpha &= -1-\frac{3}{6} \\ -6\alpha &= -4+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{1}{6} \\ -3\alpha &= -\frac{3}{2} \\ 6\alpha &= -3 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} \beta &= \frac{1}{6} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \end{cases}.$$ Donc $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$.

**b.** D'après la question précédente, Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires dur plan $(BCD)$. On peut donc affirmer que le point $H$ appartient au plan $(BCD)$. Montrons maintenant que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $(BCD)$, c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à une base du plan $(BCD)$, c'est-a-dire orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 2\times 0+2\times(-3)+(-1)\times(-6) = -6+6 = 0$

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DB} = 2\times(-6)+2\times 3+(-1)\times(-6) = -12+6+6 = 0$

Donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, donc à toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs, donc à tout vecteur du plan $(BCD)$. Donc $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur le plan $(BCD)$.

**c.** La distance du point $A$ au plan $(BCD)$ est égale à $\|\overrightarrow{AH}\|$ :

$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ unités de longueur.

**6.** $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}_{BCD}\times AH$ d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3\times\mathcal{V}_{ABCD}}{AH}$.

Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3\times 27}{3} = 27$ unités d'aire.