

Corrigé

Lycée militaire de Saint-Cyr

Interrogation de mathématiques

Term - ME

NOM :

Prénom :

Thème : Calcul algébrique dans \mathbb{C}

11/09/23

Toutes les réponses devront être soulignées.

Exercice 1

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants en détaillant vos calculs.

$$z_1 = -4i + 13 - (-7 - 6i) + 2i$$
$$= -4i + 13 + 7 + 6i + 2i$$

$$z_1 = \underline{20 + 4i}$$

$$z_2 = (2 - i)(1 - i) - (i - 5)$$
$$= 2 - 2i - i + 1 - i + 5$$

$$z_2 = \underline{6 - 4i}$$

$$z_3 = (4 - 2i)^2 + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i)(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$$

$$= 16 - 16i - 4 + 2 - 2i\sqrt{6} - 2i\sqrt{6} - 6$$

$$= \underline{8 - 16i - 3i\sqrt{6}}$$

$$z_3 = \underline{8 + i(-16 - 3\sqrt{6})}$$

$$z_4 = (1 - \frac{2}{3}i)^2 - (3 - 2i\sqrt{3})^2$$

$$= 1 - \frac{4}{3}i - \frac{4}{9} - (9 - 12i\sqrt{3} - 12)$$

$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{3}i + 3 + 12i\sqrt{3}$$

$$= \underline{\frac{32}{9} - \frac{4}{3}i + 12i\sqrt{3}}$$

$$z_4 = \underline{\frac{32}{9} + i(-\frac{4}{3} + 12\sqrt{3})}$$

Exercice 2

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = iy$ où y est un réel.

1. Exprimer en fonction de y la forme algébrique du nombre complexe $Z = (z + 1 + i)^2$.

$$Z = (iy + 1 + i)^2$$

$$= (iy)^2 + 2iy(1+i) + (1+i)^2$$

$$= -y^2 + 2iy - 2y + 1 + 2i - 1$$

$$Z = -y^2 - 2y + i(2y + 2)$$

2. En déduire les nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur.

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow -y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underline{z = 0 \text{ ou } z = -2i}$$