Sujet D

Exercice 1

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$, *à l'aide d'un changement de variable astucieux, calculer* I.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *montrer que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \int_0^x \left(\int_0^y f(t)\, dt \right) = \int_0^x (x - y) f(y)\, dy$$

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\int_{e^e}^{27} \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$ *en posant* $u = \ln(\ln x)$.

Corr ex 1

Exercice 0.6 *L'intégrale I existe car* $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$ *est bien défini, continu sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *(Sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{\sin x} \geq 0$ *et* $\sqrt{\cos x} \geq 0$, *ainsi*

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\sin x}=0 \\ \sqrt{\cos x}=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\sqrt{\cos x}\right)^4+\left(\sqrt{\sin x}\right)^4=1=0$$

Dans $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$, *on pose* $u=\frac{\pi}{2}-x$ *qui est bien* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on obtient*

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$$

d'où

$$2 I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Corr ex 2

Exercice 0.7 *La fonction* $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $G(y)=\displaystyle\int_0^y f(t)\, dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $G'(y)=f(y)$. *On a alors*

$$\int_0^x\left(\int_0^y f(t)\, dt\right) dy=\int_0^x G(y)\, dy$$

Une intégration par parties

$$\begin{array}{cc} u'(y)=1 & u(y)=y-x \\ v(y)=G(y) & v'(x)=G'(y)=f(y) \end{array}, \; u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, x]$$

donne

$$\begin{aligned} \int_0^x G(y)\, dy &= [(y-x) G(y)]_{y=0}^{y=x}-\int_0^x(y-x) f(y)\, dy \\ &= -x G(0)+\int_0^x(x-y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

Or $G(0)=\displaystyle\int_0^0 f(t)\, dt=0$ *d'où le résultat.*