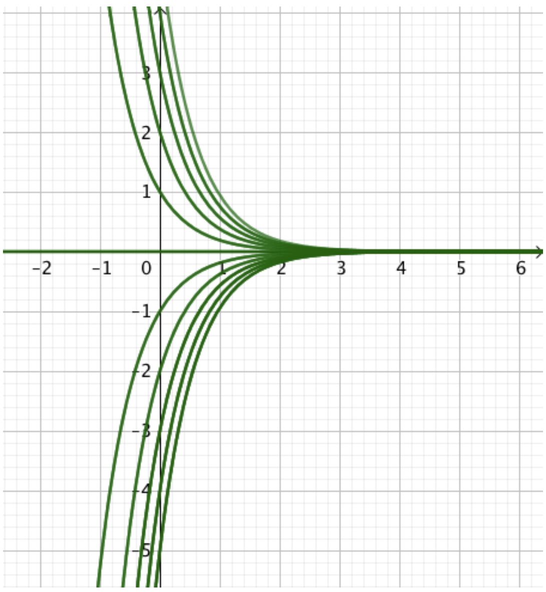
I Equations différentielles $y' = ay$

Théorème Soit a, x_0, y_0 et C des réels.
(i) L'ensemble solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions y telle que
$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{ax}$.
(ii) Il existe une seule fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay$
telle que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = ay(x)$ et $y(x_o) = y_0$.

*Démonstration **« exemplaire »** de (i)*
• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x)$
$= -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$.
La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit :
$e^{-ax} \times f(x) = C$.
Et donc : $f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Exemple
Soit l'équation différentielle (E) : $3y' + 5y = 0$.
On a $y' = -\frac{5}{3}y$.
Les solutions sont de la forme : $y(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Remarques
1) Pour différentes valeurs de C de l'exemple précédent, on obtient les courbes suivantes (appelées courbes intégrales) :



2) Toujours en reprenant l'exemple précédent, si $y(1) = 2$ alors $Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = 2 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{5}{3}} = 2 \Leftrightarrow C = 2e^{\frac{5}{3}}$ et donc l'unique solution de l'équation différentielle (E) est $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$.
3) L'équation différentielle $y' = ay$ est appelée équation linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants.

Propriété Soit a et k des réels.
Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ alors $f + g$ et kf sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstration
- $(f+g)' = f' + g' = af + ag = a(f+g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

II Equations différentielles $y' = ay + b$

Théorème Soit a, b, x_0, y_0 et C des réels avec $a \neq 0$.
(i) L'ensemble solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions y telle que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
(ii) Il existe une seule fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = ay(x) + b$ et $y(x_o) = y_0$.

Démonstration
• On détermine d'abord une fonction constante $f : x \mapsto k$ solution particulière de $y' = ay + b$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 0$. Ainsi, f est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $0 = ak + b$, soit $k = -\frac{b}{a}$.
Donc pour tout réel x, $f(x) = -\frac{b}{a}$.
• g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g' = ag + b$. Or, on sait que $f' = af + b$.
Ainsi, g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g' - f' = a(g - f)$, c'est-à-dire $(g - f)' = a(g - f)$.
Autrement dit, g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g - f$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire pour tout réel x, $g(x) - f(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Remarque
L'équation différentielle $y' = ay + b$ est appelée équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Exemple
L'équation différentielle $y' = 2y + 6$ a pour ensemble solution les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{2x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$.

Application : Le modèle de Verhulst (la loi logistique continue)

Pour certaines populations vivant dans un milieu clos (comme des bactéries dans une culture), on constate que la croissance est quasiment exponentielle au début, mais elle est freinée dès que la surpopulation se fait sentir (manque de nourriture ou d'oxygène, interactions dues à la promiscuité…)
Le mathématicien belge Pierre Verhulst propose vers 1840, le modèle suivant : on suppose que la taille de la population ne peut dépasser une valeur maximale, et on note $f(t)$ la fraction de ce maximum à l'instant t ; alors la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : \; y' = \lambda y(1 - y)$.

Il s'agit d'une ED d'ordre 1 mais elle est non linéaire. On va résoudre (E) en posant $z = \frac{1}{y}$.

1) $f(t)$ représentant une proportion[1] ; nous pouvons supposer que $0 < f(t) < 1$ et donc nous limiter à chercher des solutions y de (E) dérivables, qui ne s'annulent pas sur $[0\,;\,+\infty[$.

Si y est une solution de (E), alors la fonction $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et :

$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{\lambda y(1-y)}{y^2} = -\lambda\left(\frac{1}{y} - 1\right) = -\lambda(z-1) = -\lambda z + \lambda$. Ainsi z est solution de l'équation différentielle $z' = -\lambda z + \lambda$ et a pour ensemble solution les fonctions de la forme $z(t) = Ce^{-\lambda t} + 1$, $C \in \mathbb{R}$.

On a $f(t) = y(t) = \frac{1}{z(t)}$, d'où $f(t) = \frac{1}{Ce^{-\lambda t}+1}$.

2) En supposant que $\lambda > 0$ et que $f(0) = 0{,}01$, exprimons $f(t)$ en fonction de t.

$f(0) = 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{1}{C+1} = 0{,}01 \Leftrightarrow C + 1 = 100 \Leftrightarrow C = 99$. Donc $f(t) = \frac{1}{99e^{-\lambda t}+1}$.

On peut remarquer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$ et que l'allure de la courbe de la fonction a la forme d'un S : elle porte le nom de courbe logistique qui fut donné par Verhuslt (du grec *logistikos* qui veut dire calcul) sans qu'il donne plus de détails… Par ailleurs, on peut démontrer que pour les valeurs de t tels que $f(t) \leq 0{,}5$, f est convexe (croissance plus rapide) et qu'inversement f est concave.

III Equations différentielles $y' = ay + f$

Théorème Soit a un réel tel que $a \neq 0$ et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$ et v est une solution (générale) de l'équation différentielle $y' = ay$ (équation homogène associée).

Démonstration en exercice

Remarque
Dans les exercices de terminale, l'énoncé vous donne la solution particulière. Vous n'avez qu'à vérifier sa véracité.

Exemple
Considérons l'équation différentielle $(E) :\ y' = 2y - 4x^2$.
Les solutions de l'équation homogène associée ($y' = 2y$) sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$. Il reste à déterminer une solution particulière y_0 sous forme d'un polynôme du second degré vu que $4x^2$ en est un. C'est-à-dire :

$$y_0(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors

$$y_0' = 2y_0 - 4x^2 \Leftrightarrow 2ax + b = 2(ax^2 + bx + c) - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 2ax + b = (2a-4)x^2 + 2bx + 2c$$

L'égalité de deux polynômes a lieu si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\begin{cases} 2a - 4 = 0 \\ 2b = 2a \\ 2c = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a \\ c = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi la fonction $y_0 : x \mapsto 2x^2 + 2x + 1$ est solution de (E), donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x} + 2x^2 + 2x + 1$, où $C \in \mathbb{R}$.

[1] $f(t) = \frac{N(t)}{N_{max}}$ où $N(t)$ est la valeur de la taille la population mesurée à l'instant t et N_{max} est la valeur (théorique) maximum atteinte de la taille de la population.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = y - 4x^2 + 11x - 3$$

1. Résoudre l'équation homogène associée (E_0).

2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 3x$ est une solution particulière de (E).

3. En déduire les solutions de (E).

4. Déterminer l'expression de la seule solution de (E) vérifiant $y(0) = 4$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée (E_0) :

$$2y' + y = 0.$$

2. Chercher une solution f de (E) sous la forme

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

où m et p sont deux réels.

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 3

On se propose de déterminer toutes les fonction f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \; xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$$

1. a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$.

b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).